凸函数和奥尔里奇空间

M. A. 克拉斯諾西尔斯基
Я. Б. 鲁季茨基

科学出版社

凸函数和奥尔里奇空間

M. A. 克拉斯諾西尔斯基
Я. Б. 魯 季 茨 基 著

吳 从 炘 譯



科学出版社
1962

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ И Я. Б. РУТИЦКИЙ

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ
И ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Физико-математической литературы
Москва 1958

內 容 簡 介

以波兰数学家奥尔里奇通訊院士命名的空間的研究已有将近三十年的历史，但其成果大都散見于各种数学杂志上的論文中．本书是关于奥尔里奇空間理論的第一部专著，它系統地总結了著者从 1951 到 1958 的工作成就．特别值得提出的是作者們成功地把这种空間的一般理論应用于非綫性积分方程的研究．

凸函数和奥尔里奇空間

М. А. 克拉斯諾西尔斯基
Я. Б. 魯 季 茨 基 著

吳 从 炘 譯

*

科 学 出 版 社 出 版 （北京朝阳門大街 117 号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1962 年 5 月第 一 版 书号：2516 字数：191,000
1962 年 5 月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
（京）0001—9,100 印张：7 5/16

定价： 1.20 元

序

本专著共分四章.

第一章研究各种不同的凸函数类. 这一章的主要內容直到目前为止还仅发表在各杂志上. 作者認为本章內容即使不管书中的其它部分也还是有兴趣的, 因为凸函数在数学的許多分支中有着广泛的应用.

第二章叙述奥尔里奇空間的一般理論,这种空間是空間 L^p 的直接推广.

在这里我們对奥尔里奇空間研究通常綫性泛函分析所考虑的問題:完全性,可分性的条件, 基的存在, 等价的范数,列紧性的条件,綫性泛函的性質等等. 可以看到奥尔里奇空間有許多关系与空間 L^p 相似.

第三章研究定义在奥尔里奇空間的算子和泛函.

作者在討論形如

$$\lambda\varphi(x) = \int_0^1 k(x, y)f[\varphi(y)]dy$$

的非綫性积分方程时,感到有应用奥尔里奇空間的必要,其中 $f(u)$ 是增加速度快于任意冪的函数.

对任何 $p > 1$, 上述积分方程的右端所定义的算子并不映空間 L^p 到它自己內,因此借助非綫性泛函分析的方法来研究这种积分方程出現了困难, 而第二章和第三章的結果使我們能够来討論相当广泛的非綫性方程的类.

本书的最后一章研究了若干非綫性的問題.

作者利用这个机会向希洛夫 (Г. Е. Шилов) 表示感謝,他的許多意見本书已經采用.

目　　录

第二章　奥尔里奇空間

第三章　奥尔里奇空間內的算子

第四章 非綫性积分方程

第一章　特殊类的凸函数

§1. N-函　数

1. 凸函数.　实变量 u 的实值函数 $M(u)$ 称为凸的,假如对于 u_1 和 u_2 的一切值满足不等式

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leqslant \frac{M(u_1)+M(u_2)}{2}. \tag{1.1}$$

我們仅对連續的凸函数有兴趣. 条件 (1.1) 表明联結函数 $M(u)$ 的图形上任何两点的弦的中点恆位于图形的对应点之上.

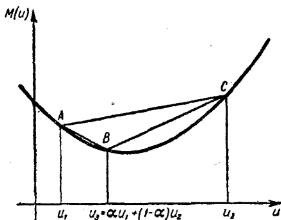


图 1

从几何上 (图 1) 易見所有的弦均位于函数的图形之上, 即对于一切 $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 不等式

$$M[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2] \leqslant \alpha M(u_1) + (1-\alpha)M(u_2) \tag{1.2}$$

恆成立. 这个不等式称为琴生不等式. 我們还可以用解析的方法来証明該不等式. 事实上,假設不等式 (1.2) 不是对于[0, 1]上的一切 α 均能满足,那么連續函数

$$f(\alpha)=M[\alpha u_1+(1-\alpha)u_2]-\alpha M(u_1)-(1-\alpha)M(u_2)$$

在 $[0, 1]$ 上的最大值 M_0 为正. 我們把使得 $f(\alpha)$ 具有值 M_0 的自变量的最小值記为 α_0. 又假定 $\delta > 0$ 是这样的数，它使得区間 $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ 包含在 $[0, 1]$ 內. 于是对点

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)u_2,$$
$$u_2^* = (\alpha_0 + \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)u_2$$

应用不等式(1.1)并且轉到函数 $f(\alpha)$ 即得

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0.$$

于是发生矛盾,因而不等式(1.2)获証.

如果 $u_1 \neq u_2$, 則 (1.2) 中的等号成立，或者只有当 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$ 时,或者对于一切 $\alpha \in [0, 1]$. 事实上,假設对某个 $\alpha_0 \in (0, 1)$ (1.2) 中的等号成立，即 $f(\alpha_0) = 0$. 今証在此情况下对于一切 $\alpha \in [0, 1]$ 有 $f(\alpha) = 0$. 容易看出,連續函数 $f(\alpha)$ 是凸的,因此它同样也滿足琴生不等式. 假設对于某个 $\alpha_1 \in (0, 1)$ 有 $f(\alpha_1) < 0$, (根据已經証明的結論 $f(\alpha)$ 不能为正). 为了确定起見，假定 $\alpha_1 < \alpha_0$,因为 $\alpha_0 = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1}\alpha_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}$,則由琴生不等式

$$f(\alpha_0) \leqslant \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} f(1) = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) < 0.$$

这与 $f(\alpha_0) = 0$ 矛盾.

不等式(1.1)还可以再推广成如下的形式:对任何 $u_1, u_2, \cdots, u_n$,

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n}[M(u_1) + M(u_2) + \cdots + M(u_n)]. \qquad (1.3)$$

对形如 2^k 的一切 n,只要連續应用(1.1)就能証明不等式(1.3). 較复杂的是任意 n 的情形. 假設 m 是这样的数,它使得 $n + m = 2^k$, 則

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + mu^*}{n + m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+m}[M(u_1)+M(u_2)+\cdots+M(u_n)+mM(u^*)].$$

命 $u^*=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$, 即得(1.3).

設 $u_1\leqslant u_3\leqslant u_2$,則

$$u_3=\frac{u_2-u_3}{u_2-u_1}u_1+\frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}u_2,$$

于是由不等式(1.2),

$$M(u_3)\leqslant \frac{u_2-u_3}{u_2-u_1}M(u_1)+\frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}M(u_2),$$

故得

$$\frac{M(u_3)-M(u_1)}{u_3-u_1}\leqslant \frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2-u_1}\leqslant \frac{M(u_2)-M(u_3)}{u_2-u_3}. \tag{1.4}$$

所得到的不等式(参看图 1)表明弦 AB 的角系数小于弦 AC 的角系数,而它又小于弦 BC 的角系数.

2. 凸函数的积分表达式.

引理 1.1. 連續凸函数 $M(u)$ 在每一点都有右导数 $p_+(u)$ 和左导数 $p_-(u)$, 并且

$$p_-(u)\leqslant p_+(u). \tag{1.5}$$

証. 由于(1.4),当 $0<h_1<h_2$ 时

$$\frac{M(u)-M(u-h_2)}{h_2}\leqslant \frac{M(u)-M(u-h_1)}{h_1}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(u+h_1)-M(u)}{h_1}\leqslant \frac{M(u+h_2)-M(u)}{h_2}. \tag{1.6}$$

从这些不等式即可推出关系式

$$\frac{M(u)-M(u-h)}{h}$$

是非減的, 因而当 $h\to+0$ 时有极限 $p_-(u)$. 类似地, 关系式 $\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$ 是非增的, 因而当 $h\to+0$ 时有极限 $p_+(u)$. 至于不等式(1.5)同样能由(1.6)推出.

引理 1.2. 連續凸函数 $M(u)$ 的右导数 $p_+(u)$ 是非减的右連續函数.

証. 假設 $u_1 < u_2$, 則当正数 h 充分小时

$$u_1 + h < u_2 - h,$$

于是由(1.4),

$$\frac{M(u_1 + h) - M(u_1)}{h} \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_2 - h)}{h}. \tag{1.7}$$

取极限并利用不等式(1.5)即得

$$p_+(u_1) \leqslant p_+(u_2). \tag{1.8}$$

这样,函数 $p_+(u)$ 的单調性就証明了.

在証明引理 1.1 时曾經指出,对于一切 $h > 0$

$$p_+(u) \leqslant \frac{M(u + h) - M(u)}{h}.$$

固定 h 并且取当 $u \to u_0 + 0$ 时的极限, 由函数 $M(u)$ 的連續性即得

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \leqslant \frac{M(u_0 + h) - M(u_0)}{h}. \tag{1.9}$$

由于函数 $p_+(u)$ 的单調性, 不等式左端的极限是存在的. 再在 (1.9) 中取当 $h \to +0$ 时的极限,得到

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \leqslant p_+(u_0).$$

另一方面,当 $u \geqslant u_0$ 时 $p_+(u) \geqslant p_+(u_0)$,由此

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) \geqslant p_+(u_0).$$

因而

$$\lim_{u \to u_0+0} p_+(u) = p_+(u_0).$$

上述等式表明了函数 $p_+(u)$ 的右連續性.

引理証毕.

附注. 完全类似地可以証明 $p_-(u)$ 是非减的左連續函数.

引理 1.3. 凸函数 $M(u)$ 在任何有限区間内絕对連續且滿足李普希茲条件.

證. 考察任一区間 $[a, b]$. 假設 $a < u_1 < u_2 < b$. 由于(1.4)

$$\frac{M(u_1) - M(a)}{u_1 - a} \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leqslant \frac{M(b) - M(u_2)}{b - u_2}.$$

从上述不等式即可推出

$$p_+(a) \leqslant \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leqslant p_-(b),$$

亦即对于区間 $[a, b]$ 内的一切 u_1, u_2, 量 $\left|\frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1}\right|$ 是有界的.

引理証毕.

定理 1.1. 任何满足条件 $M(a) = 0$ 的凸函数 $M(u)$ 可表为

$$M(u) = \int_a^u p(t)dt, \tag{1.10}$$

其中 $p(t)$ 是非減的右連續函数.

証. 首先注意函数 $M(u)$ 几乎处处有导数. 事实上, 由于(1.7)和(1.5), 当 $u_2 > u_1$ 时

$$p_-(u_2) \geqslant p_+(u_1) \geqslant p_-(u_1). \tag{1.11}$$

因为函数 $p_-(u)$ 是单調的, 所以它几乎处处連續. 假設 u_1 是函数 $p_-(u)$ 的連續点, 在(1.11)中取当 $u_2 \to u_1$ 时的极限, 即得

$$p_-(u_1) \geqslant p_+(u_1) \geqslant p_-(u_1),$$

于是

$$p_-(u_1) = p_+(u_1).$$

因而几乎处处有

$$M'(u) = p(u) = p_+(u).$$

由于引理 1.3, 函数 $M(u)$ 絕对連續, 因此它就是 (例如参看[38]) 自己的导数的不定积分.

定理証毕.

3. N-函数的定义. 函数 $M(u)$ 称为 N-函数, 如果它能够表为

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt, \tag{1.12}$$

其中 $p(t)$ 当 $t > 0$ 时为正，又当 $t \geqslant 0$ 时是右連續的非減函数并且还滿足条件：

$$p(0) = 0, p(\infty) = \lim_{t \to \infty} p(t) = \infty. \tag{1.13}$$

簡言之，上述条件表明，函数 $p(t)$ 必須具有形如图 2 的图形，而 N-函数的值就是相应的曲綫梯形的面积.

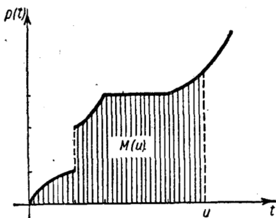


图 2

譬如函数

$$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}\ (\alpha > 1),\ M_2(u) = e^{u^2} - 1$$

就是 N-函数的例子. 对于其中的第一个，$p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}$，而对于第二个，$p_2(t) = M_2'(t) = 2te^{t^2}$.

4. N-函数的性质. 由表达式(1.12)可推出每一个 N-函数是連續的偶函数，它在零点的值为零并且当自变量的值为正时还是增加的.

N-函数是凸的. 事实上，如果 $0 \leqslant u_1 < u_2$，则由于 $p(t)$ 的单調性

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \int_0^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt \leqslant \int_0^{u_1} p(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{\frac{u_1+u_2}{2}} p(t)dt + \int_{\frac{u_1+u_2}{2}}^{u_2} p(t)dt\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{u_1} p(t)\,dt + \int_0^{u_2} p(t)dt\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[M(u_1) + M(u_2)\right].$$

在 u_1, u_2 任意的情况下

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = M\left(\frac{|u_1+u_2|}{2}\right) \leqslant M\left(\frac{|u_1|+|u_2|}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[M(u_1) + M(u_2)].$$

在(1.2)中假設 $u_2 = 0$,可得

$$M(\alpha u_1) \leqslant \alpha M(u_1) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{1.14}$$

条件(1.13)的第一个等式表明

$$\lim_{u\to 0} \frac{M(u)}{u} = 0. \tag{1.15}$$

从(1.13)的第二个条件又可推出

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(u)}{u} = \infty, \tag{1.16}$$

因为当 $u > 0$ 时

$$\frac{M(u)}{u} = \frac{1}{u}\int_0^u p(t)dt \geqslant \frac{1}{u}\int_{\frac{u}{2}}^u p(t)dt \geqslant \frac{1}{2}\,p\left(\frac{u}{2}\right).$$

我們指出,对 N-函数而言,(1.14) 中仅当 $\alpha = 0, 1$ 或 $u_1 = 0$ 时等号成立. 事实上,假設 $u_1 \neq 0$ 并且对于某个 $\alpha \in (0, 1)$(1.14) 中的等号成立, 則由 2 頁所証明的結論在 (1.14) 中对于一切 $\alpha \in [0, 1]$ 等号成立. 于是对于一切 $\alpha \in [0, 1]$

$$\frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}.$$

在此等式中取当 $\alpha \to 0$ 时的极限,得到

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{M(\alpha u_1)}{\alpha u_1} = \frac{M(u_1)}{u_1}.$$

这与(1.15)矛盾.

由此可見

$$M(\alpha u) < \alpha M(u) \quad (0 < \alpha < 1, u \neq 0). \tag{1.17}$$

由上述不等式可推出函数 $\frac{M(u)}{u}$ 当 u 为正值时是严格增加的

$$\frac{M(u')}{u'} < \frac{M(u)}{u} \quad (0 < u' < u). \tag{1.18}$$

为了証明这个断言,只須在(1.17)中命 $\alpha = \frac{u'}{u}$.

我們所得到的性質已經完全足以描述 N-函数的图形了(图3). 性質(1.15)表明横軸与 N-函数的图形在原点相切. 而性質(1.18)和(1.16)給出联結原点与 N-函数图形上的动点的弦之角系数的变化特征. N-函数的图形可能包含間断点和直綫段. 間断点对应于函数 $p(t)$ 的間断点,而直綫段对应于函数 $p(t)$ 的常数区間.

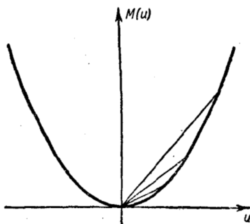


图 3

当自变量为非負值时, N-函数 $M(u)$ 的反函数記为 $M^{-1}(v)$ $(0 \leqslant v < \infty)$. 这个函数是凹的,因为由不等式(1.2)当 $v_1, v_2 \geqslant 0$ 时

$$M^{-1}[\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2] \geqslant \alpha M^{-1}(v_1) + (1-\alpha)M^{-1}(v_2).$$

从 N-函数 $M(u)$ 的右导数 $p(u)$ 的单調性可推出不等式

$$M(u)+M(v)=\int_0^{|u|}p(t)dt+\int_0^{|v|}p(t)dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{|u|}p(t)dt+\int_{|u|}^{|u|+|v|}p(t)dt=$$

$$=\int_0^{|u|+|v|}p(t)dt=M(|u|+|v|). \qquad (1.19)$$

假設 $a=M(u)$, $b=M(v)$ 是任意非負的数, 則由 (1.19) 又得到

$$M^{-1}(a+b)\leqslant M^{-1}(a)+M^{-1}(b). \qquad (1.20)$$

5. N-函数的第二种定义. 使用以下的定义有时是很方便的. 連續凸函数 $M(u)$ 称为 N-函数,假如它是偶函数并且满足条件(1.15)和(1.16). 今証这个定义与前面的定义等价. 显然我們只須証从 N-函数的第二个定义可以推出把它表为 (1.12) 形式的可能性.

由于(1.15) $M(0)=0$, 因此由函数 $M(u)$ 的偶函数性和定理 1.1, 能把它表为

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt$$

的形式, 其中 $p(u)$ 是当 $u>0$ 时非減的右連續函数 (函数 $M(u)$ 的右导数). 因为当 $u>0$ 时

$$p(u)\geqslant\frac{M(u)}{u},$$

則当 $u>0$ 时 $p(u)>0$, 并且由(1.16)

$$\lim_{u\to\infty}p(u)=\infty.$$

另一方面,当 $u>0$ 时

$$M(2u)=\int_0^{2u}p(t)dt>\int_u^{2u}p(t)dt>up(u),$$

因而

$$p(u)<\frac{M(2u)}{u}.$$

因此由(1.15)

$$p(0)=\lim_{u\to 0}p(u)=0.$$

6. N-函数的复合函数. 两个 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 的复合函数 $M(u) = M_2[M_1(u)]$ 仍然是 N-函数. 事实上,函数 $M(u)$ 有右导数(当 $u > 0$ 时)

$$p(u) = p_2[M_1(u)]p_1(u),$$

其中 $p_1(u)$, $p_2(u)$ 是 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 的右导数. 函数 $p(u)$ 右連續、非減且滿足条件 (1.13), 因为函数 $p_1(u)$ 和 $p_2(u)$ 滿足这些条件.

其逆亦眞: 任何 N-函数 $M(u)$ 都是两个 N-函数的复合函数 $M(u) = M_2[M_1(u)]$.

如果 $M_1(u)$ 为一給定的 N-函数,則函数 $M_2(u)$ 由等式

$$M_2(u) = M[M_1^{-1}(|u|)] \tag{1.21}$$

唯一地确定,其中 $M_1^{-1}(v)$ 是 $M_1(u)$ 的反函数.

这样一来,为了将 $M(u)$ 表成复合函数的形式,必須找出这样的 N-函数 $M_1(u)$,使 $M_2(u) = M[M_1^{-1}(|u|)]$ 也是 N-函数.

因为当 $u > 0$ 时

$$p_2(u) = \frac{p[M_1^{-1}(u)]}{p_1[M_1^{-1}(u)]},$$

所以欲使 $M_2(u)$ 是 N-函数,必須且只須函数 $\frac{p(u)}{p_1(u)}$ 非減、右連續并且滿足条件 (1.13), 因为連續函数 $M_1^{-1}(v)$ 单調且与 v 一齐趋近于零和无穷.

这样,如果我們找到了非減、右連續并且滿足条件(1.13)的函数 $p_1(u)$,使 $\frac{p(u)}{p_1(u)}$ 同样是非減、右連續并且滿足条件 (1.13) 的函数,那么函数

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} p_1(t)dt$$

和由等式(1.21)所定义的 $M_2(u)$ 都是 N-函数,并且等式 $M(u) = M_2[M_1(u)]$ 成立.

作为函数 $p_1(u)$ 特別可以取

$$p_1(u) = [p(u)]^{\varepsilon_0} \quad (0 < \varepsilon_0 < 1).$$

让我們再指出，如果 N-函数 $M(u)$ 是两个 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 的复合函数，则对每一个 $k>0$ 相应的有常数 $u_0 \geqslant 0$，使当 $u \geqslant u_0$ 时

$$M(u) > M_2(ku).$$

§2. 余 N-函数

1. 定义. 假設 $p(t)$ 当 $t>0$ 时为正，当 $t \geqslant 0$ 时是右連續的非減函数并且滿足条件(1.13). $q(s)(s \geqslant 0)$ 是由等式

$$q(s) = \sup_{p(t) \leqslant s} t \tag{2.1}$$

所定义的函数.

不难看出，函数 $q(s)$ 具有与函数 $p(t)$ 同样的性質：当 $s>0$ 时为正，当 $s \geqslant 0$ 时是右連續的非減函数并且滿足条件

$$q(0) = 0, \quad \lim_{s \to \infty} q(s) = \infty. \tag{2.2}$$

直接从函数 $q(s)$ 的定义可推出不等式

$$q[p(t)] \geqslant t; \quad p[q(s)] \geqslant s, \tag{2.3}$$

并且当 $\varepsilon > 0$ 时

$$q[p(t) - \varepsilon] \leqslant t, \quad p[q(s) - \varepsilon] \leqslant s. \tag{2.4}$$

如果函数 $p(t)$ 連續而且单調增加，则函数 $q(s)$ 是函数 $p(t)$ 的通常反函数. 在一般情况下，函数 $q(s)$ 称为 $p(t)$ 的**右反函数**. 函数 $p(t)$ 同样也是 $q(s)$ 的右反函数. 描繪在图 4 上的函数 $q(s)$ 就是描繪在图 2 上的函数 $p(t)$ 的右反函数.

函数

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt, \quad N(v) = \int_0^{|v|} q(s)ds$$

称为互余的 N-函数.

假設 $\Phi(u)$ 和 $\Psi(v)$ 是互余的 N-函数. 在許多場合需要我們研究 N-函数 $\Phi_1(u) = a\Phi(bu)\ (a, b > 0)$. 显然它的余 N-函数 $\Psi_1(v)$ 由下列等式确定：

$$\Psi_1(v) = a\Psi\left(\frac{v}{ab}\right). \tag{2.5}$$

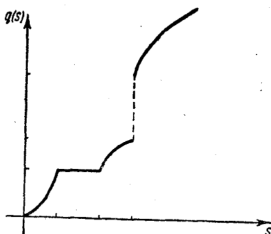


图 4

事实上,函数 $\Phi_1(u)$ 的右导数 $p_1(t)$ 等于 $abp(bt)$,其中 $p(t)$ 是 N-函数 $\Phi(u)$ 的右导数. 因此

$$q_1(s) = \frac{1}{b} q\left(\frac{s}{ab}\right),$$

从而

$$\Psi_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s)ds = \frac{1}{b}\int_0^{|v|} q\left(\frac{s}{ab}\right)ds = a\int_0^{\frac{|v|}{ab}} q(s)ds,$$

故得(2.5).

2. 楊格不等式. 我們运用通常推导荷尔德不等式的思考方法,在图 5 上面积 T 和 S 分别表示 N-函数 $M(u)$ 和 $N(v)$ 的值. 从几何上显然有

$$uv \leqslant T + S = M(u) + N(v).$$

由于函数 $M(u)$ 和 $N(v)$ 均为偶函数,所以上述不等式对于一切的 u, v 都成立,它称为楊格不等式. 由此可見

$$uv \leqslant M(u) + N(v). \qquad (2.6)$$

同样从图 5 可以看出不等式(2.6)变成等式,假如对于已給的 u, $v = p(|u|)\,\mathrm{sign}\,u$ 和对于已給的 v, $u = q(|v|)\,\mathrm{sign}\,v$, 这样一来

$$|u|p(|u|) = M(u) + N[p(|u|)] \qquad (2.7)$$

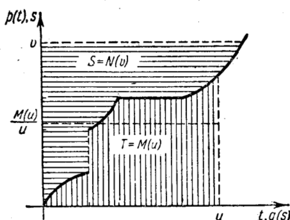


图 5

和

$$|v|q(|v|) = M[q(|v|)] + N(v). \tag{2.8}$$

从(2.6)可推出

$$N(v) \geqslant uv - M(u).$$

又由(2.8)，該不等式当 $u = q(|v|)\operatorname{sign} v$ 时变成等式，因此

$$N(v) = \max_{u \geqslant 0} [u|v| - M(u)]. \tag{2.9}$$

公式(2.9)也可以作为 $M(u)$ 的余 N-函数的定义.

从楊格不等式得知

$$M^{-1}(v)N^{-1}(v) \leqslant 2v \quad (v > 0).$$

另一方面，从图 5 又可看出 $N\left[\frac{M(u)}{u}\right] < M(u)$，于是当 $M(u) = v$ 时就得到

$$v < M^{-1}(v)N^{-1}(v).$$

这样一来，对于一切的 $v > 0$

$$v < M^{-1}(v)N^{-1}(v) \leqslant 2v. \tag{2.10}$$

3. 例. 我們已經指出函数 $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ $(\alpha > 1)$ 是 N-函数，今求其余 N-函数. 显然当 $t > 0$ 时

$$p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}.$$

因此

$$q_1(s) = s^{\beta-1} \quad (s \geqslant 0),$$

其中 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,于是

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s)\,ds = \frac{|v|^\beta}{\beta}.$$

作为第二个例子,我們来計算 N-函数 $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ 的余 N-函数. 对于这个函数

$$p_2(t) = M_2'(t) = e^t - 1 \quad (t \geqslant 0),$$

因此

$$q_2(s) = \ln(s+1) \quad (s \geqslant 0),$$

于是

$$N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s)\,ds = (1+|v|)\ln(1+|v|) - |v|. \quad (2.11)$$

注意,在很多情况下是不能求出余 N-函数的明显公式的. 例如,若 $M(u) = e^{u^2} - 1$, 则 $p(t) = 2te^{t^2}$, 但不能把 $q(s)$ 表示成明显的形式.

4. 余函数的不等式.

定理 2.1. 設 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 当 $u \geqslant u_0$ 时滿足不等式

$$M_1(u) \leqslant M_2(u),$$

则对余 N-函数 $N_1(v)$ 和 $N_2(v)$ 不等式

$$N_2(v) \leqslant N_1(v)$$

当 $v \geqslant v_0 = p_2(u_0)$ 时成立.

証. 假設 $p_2(u)$ 是 N-函数 $M_2(u)$ 的右导数,由函数 $q_2(v)$ 的单調性,当 $v \geqslant v_0 = p_2(u_0)$ 时有不等式 $q_2(v) \geqslant u_0$. 由于(2.8)

$$q_2(v) \cdot v = M_2[q_2(v)] + N_2(v),$$

又由于楊格不等式

$$q_2(v) \cdot v \leqslant M_1[q_2(v)] + N_1(v),$$

有

$$M_2[q_2(v)] + N_2(v) \leqslant M_1[q_2(v)] + N_1(v).$$

再因当 $v \geqslant v_0$ 时 $M_2[q_2(v)] \geqslant M_1[q_2(v)]$,故

$$N_2(v) \leqslant N_1(v).$$

定理証毕.

§3. N-函数的比較

1. 定义. 我們知道当 $u \to \infty$ 时 N-函数的值的增加速度很快，这在以后的研究中起着重要的作用. 为了方便起見，引入以下記号. 我們記

$$M_1(u) \prec M_2(u), \tag{3.1}$$

假如能够找到正常数 u_0 和 k 使得

$$M_1(u) \leqslant M_2(ku) \quad (u \geqslant u_0). \tag{3.2}$$

N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 称为可比較的，假如关系式 $M_1(u) \prec M_2(u)$ 或 $M_2(u) \prec M_1(u)$ 成立.

不难看出，从 $M_1(u) \prec M_2(u)$ 和 $M_2(u) \prec M_3(u)$ 可推出 $M_1(u) \prec M_3(u)$. 若在元素的集合中引入(3.1)型的关系式并且满足上述所指出的性質. 則称此集合为半序集合. 这样一来，N-函数关于符号 $\prec$ 构成半序集合.

假設 $\alpha_1 < \alpha_2$，那么函数 $M_1(u) = |u|^{\alpha_1}$，$M_2(u) = |u|^{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2 > 1)$ 就是满足关系式(3.1)的 N-函数的最簡单的例子.

現在来研究 N-函数 $M(u) = |u|^{\alpha}(|\ln|u|| + 1)(\alpha > 1)$. 显然，对于任何 $\varepsilon > 0$，$|u|^{\alpha} \prec M(u) \prec |u|^{\alpha+\varepsilon}$.

2. 等价的 N-函数. 若 $M_1(u) \prec M_2(u)$ 和 $M_2(u) \prec M_1(u)$，則称 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 是等价的. 記为 $M_1(u) \sim M_2(u)$.

显然，每一个 N-函数等价于它自己，若两个 N-函数等价于第三个 N-函数，則它們彼此等价. 由此可知，所有 N-函数的集合可以分解成彼此等价的函数类.

从定义可以推出，N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 等价的充要条件为存在着正的常数 k_1, k_2 和 u_0，使得

$$M_1(k_1 u) \leqslant M_2(u) \leqslant M_1(k_2 u) \quad (u \geqslant u_0). \tag{3.3}$$

特别，从此不等式可以得出，对于任何的 $k > 0$，N-函数 $M(u)$ 等价于 N-函数 $M(ku)$. 显然，满足条件

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{M_1(u)}=a>0 \tag{3.4}$$

的 N-函数 $M(u)$ 和 $M_1(u)$ 也是等价的.

定理 3.1. 假設 $M_1(u) \prec M_2(u)$, 則其余 N-函数有关系式

$$N_2(v) \prec N_1(v).$$

証. 根据已知条件,可以找到这样的 k, $u_0>0$, 使得

$$M_1(u) \leqslant M_2(ku) \quad (u \geqslant u_0). \tag{3.5}$$

令 $M(u)=M_2(ku)$, 則由(2.5)可知 $M(u)$ 的余 N-函数 $N(v)$ 等于 $N_2\left(\frac{v}{k}\right)$.

于是不等式(3.5)可以写成

$$M_1(u) \leqslant M(u) \quad (u \geqslant u_0).$$

从而由定理 2.1, 能够找到这样的 $v_0>0$, 使得

$$N(v) \leqslant N_1(v) \quad (v \geqslant v_0),$$

故有

$$N_2(v) \leqslant N_1(kv) \quad \left(v \geqslant \frac{v_0}{k}\right).$$

定理証毕.

从上述定理直接得到

定理 3.2. 若 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 等价, 則它們的余 N-函数 $N_1(v)$ 和 $N_2(v)$ 也等价.

定理 3.2 表明, 彼此等价的 N-函数类的余 N-函数也是等价的 N-函数类.

3. N-函数的主要部分. 凸函数 $Q(u)$ 称为 N-函数 $M(u)$ 的主要部分(гл. ч.), 假如对自变量較大的值 $Q(u)=M(u)$.

定理 3.3. 若凸函数 $Q(u)$ 满足条件

$$\lim_{u\to\infty}\frac{Q(u)}{u}=\infty, \tag{3.6}$$

則 $Q(u)$ 是某个 N-函数的主要部分.

証. 从条件(3.6)可推出 $\lim\limits_{u\to\infty} Q(u)=\infty$. 假定凸函数 $Q(u)$

当 $u \geqslant u_0$ 时是正的，由定理 1.1，函数 $Q(u)$ 可以表为

$$Q(u) = \int_{u_0}^{u} p(t)dt + Q(u_0),$$

其中 $p(u)$ 是非减的右連續函数．此函数滿足条件 $\lim\limits_{u\to\infty} p(u) = \infty$，因为从函数 $p(u)$ 的有界性，即从 $p(u) \leqslant b$，可推出

$$Q(u) \leqslant b(u - u_0) + Q(u_0),$$

这与(3.6)矛盾．不失普遍性，可以認为 $p(u)$ 当 $u \geqslant u_0$ 时是正的．

因为 $p(u)$ 无限增加，因此可以指出这样的 $u_1 \geqslant u_0 + 1$，使得

$$p(u_1) \geqslant p(u_0 + 1) + Q(u_0).$$

于是

$$\begin{aligned} Q(u_1) &= \int_{u_0}^{u_0+1} p(t)dt + \int_{u_0+1}^{u_1} p(t)dt + Q(u_0) \leqslant \\ &\leqslant p(u_0 + 1) + Q(u_0) + p(u_1)(u_1 - u_0 - 1) \leqslant \\ &\leqslant p(u_1)(u_1 - u_0), \end{aligned}$$

因而

$$\alpha = \frac{u_1 p(u_1)}{Q(u_1)} > 1.$$

定义函数 $M(u)$，借助于等式

$$M(u) = \begin{cases} \dfrac{Q(u_1)}{u_1^{\alpha}} |u|^{\alpha} & \text{当 } |u| \leqslant u_1 \text{ 时,} \\ Q(u) & \text{当 } |u| \geqslant u_1 \text{ 时,} \end{cases}$$

则 $M(u)$ 是 N-函数，因为它的右导数

$$M'_{+}(u) = \begin{cases} \dfrac{\alpha Q(u_1)}{u_1^{\alpha}} u^{\alpha-1} & \text{当 } 0 \leqslant u \leqslant u_1 \text{ 时,} \\ p(u) & \text{当 } u \geqslant u_1 \text{ 时.} \end{cases}$$

当 $u > 0$ 时是正的，当 $u \geqslant 0$ 时是右連續的非減函数并且滿足条件(1.13)．

定理証毕．

4. 关于等价性的一种判别法．

数軸上的集合 F 称为完全测度集合，如果不属于 F 的点的集合的测度等于零．

今考察两个 N-函数：

$$M_1(u)=\int_0^{|u|}p_1(t)dt,\ M_2(u)=\int_0^{|u|}p_2(t)dt. \tag{3.7}$$

引理 3.1. 假設存在常数 k, $u_0>0$ 和完全測度集合 F，使

$$p_1(u)\leqslant p_2(ku)\quad (u\geqslant u_0,\ u\in F),$$

則 N-函数

$$M_1(u)=\int_0^{|u|}p_1(t)dt\quad 和\quad M_2(u)=\int_0^{|u|}p_2(t)dt$$

满足关系式 $M_1(u)\prec M_2(u)$.

証. 从 u_0 到 u 积分在引理的条件中所給出的不等式，得到

$$M_1(u)-M_1(u_0)\leqslant\frac{1}{k}[M_2(ku)-M_2(ku_0)]<$$

$$<\frac{1}{k}M_2(ku)\quad (u\geqslant u_0).$$

不失一般性，可以認为 $k>1$. 由于 $M_1(u)$ 无限增加，于是可以找到这样的 $u_1\geqslant u_0$，使当 $u\geqslant u_1$ 时

$$M_1(u)-M_1(u_0)\geqslant\frac{1}{k}M_1(u).$$

因此当 $u\geqslant u_1$ 时

$$M_1(u)\leqslant M_2(ku).$$

引理証毕.

如果对于較大的 u 满足不等式 $p_1[\alpha q_2(\beta u)]<u$，則从引理 3.1 可推出 $M_1(u)\prec M_2(u)$.

引理 3.2. 假設

$$\lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in F}}\frac{p_1(u)}{p_2(u)}=b>0, \tag{3.8}$$

其中 F 是完全測度集合，則 $M_1(u)\sim M_2(u)$.

証. 由(3.8)可选出这样的 $u_0>0$，使当 $u\geqslant u_0$, $u\in F$ 时

$$p_1(u)\leqslant 2bp_2(u).$$

从 u_0 到 u 积分最后的不等式，得到

$$M_1(u)-M_1(u_0)\leqslant 2b[M_2(u)-M_2(u_0)]\quad (u\geqslant u_0),$$

由此及 $\lim\limits_{u\to\infty} M_2(u)=\infty$ 可推出,对于較大的 u 值

$$M_1(u)\leqslant(2b+1)M_2(u).$$

由上述不等式和(1.17)又可推出,对于較大的 u 值

$$M_1(u)\leqslant M_2[(2b+1)u],$$

卽

$$M_1(u)\prec M_2(u).$$

类似地可以証明 $M_2(u)\prec M_1(u)$.

引理証毕.

在引理 3.2 的条件中, 起作用的只是在自变量的値較大时函数 $p_1(u)$ 和 $p_2(u)$ 的值. 此处以及另外一些考虑 N-函数 $M(u)$ 的右导数 $p(u)$ 的情况中, 重要的只是当自变量 u 的値較大时函数 $p(u)$ 的公式. 由于这个原因,我們采用下面的定义:函数 $\varphi(u)$ 称为函数 $p(u)$ 的主要部分(гл. ч.), 如果当自变量的值較大时它們相同.

定理 3.4. 假設給定了 N-函数(3.7)和它們的余 N-函数

$$N_1(v)=\int_0^{|v|}q_1(s)ds,\quad N_2(v)=\int_0^{|v|}q_2(s)ds,$$

又設存在完全測度集合 F_1, 使

$$\lim_{\substack{v\to\infty\\ v\in F_1}}\frac{p_1[q_2(v)]}{v}=b>0, \tag{3.9}$$

則 $M_1(u)\sim M_2(u)$.

証. 引入符号 $q_2(v)=u$. 由于(2.3)

$$p_2[q_2(v)]=p_2(u)\geqslant v, \tag{3.10}$$

又由于(2.4),对于任意的 $\varepsilon>0$

$$p_2(u-\varepsilon)\leqslant v. \tag{3.11}$$

以 F 表示函数 $p_1(u)$ 和 $p_2(u)$ 的連續点所构成的 F_1 的子集,因为任何单調函数的間断点不多于可数个, 因此 F 仍然是完全測度集合.

从(3.10)可推出

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)}\leqslant\frac{p_1(u)}{v}=\frac{p_1[q_2(v)]}{v},$$

由此和(3.9)

$$\overline{\lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in F_1}}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} \leqslant b. \tag{3.12}$$

由(3.11)得知,对于一切的 $u \in F$

$$\frac{p_1(u)}{p_2(u)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{p_1(u)}{p_2(u-\varepsilon)} \geqslant \frac{p_1(u)}{v} = \frac{p_1[q_2(v)]}{v},$$

由此和(3.9)

$$\underline{\lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in F}}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} \geqslant b. \tag{3.13}$$

从不等式(3.12)和(3.13)可推出

$$\lim_{\substack{u\to\infty\\ u\in F}} \frac{p_1(u)}{p_2(u)} = b.$$

从最后的等式和引理 3.2 即得 $M_1(u) \sim M_2(u)$. 定理証毕.

5. 各种不同的类的存在. 由于引入了等价 N–函数类,于是就产生了存在"多少"不同的类的問題. 显然, 例如 N–函数 $|u|^\alpha$ 对于不同的 $\alpha > 1$ 属于不同的类. N–函数 $M(u) = (1+|u|)\times \ln(1+|u|) - |u|$ 满足关系式 $M(u) \prec |u|^\alpha (\alpha > 1)$, 然而它不等价于任何一个 N–函数 $|u|^\alpha$. 又满足关系式 $|u|^\alpha \prec M_1(u)$ 的 N–函数 $M_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, 它也不等价于任何一个 N–函数 $|u|^\alpha$.

今假設

$$M_n(u) = \int_0^{|u|} p_n(t)dt \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.14}$$

是任意的一个 N–函数列. 我們来作出这样的 N–函数 $M(u)$ 和 $\Phi(u)$, 使

$$M_n(u) \prec M(u) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.15}$$

和

$$\Phi(u) \prec M_n(u) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{3.16}$$

假設当 $n-1 \leqslant t < n$ 时 $p(t) = p_1(t) + p_2(t) + \cdots + p_n(t)$, 則函数 $p(t)$ 右連續、单調增加并且满足条件 (1.13). 由于引理

3.1, N-函数

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$$

满足关系式(3.15).

根据已有的証明又可以造出 N-函数 $\Psi(v)$,满足关系式

$$N_n(v) \prec \Psi(v),$$

其中 $N_n(v)$ 是 N-函数(3.14)的余 N-函数. 再由于定理 3.1, N-函数 $\Psi(v)$ 的余 N-函数 $\Phi(u)$ 就满足条件(3.16).

假設 $M(u)$ 是某个 N-函数, 則函数 $M_1(u) = e^{M(u)} - 1$ 也是 N-函数. 显然, $M(u) \prec M_1(u)$. 容易看出,当 $M(u)$ 不比冪函数增加得快时, $M_1(u)$ 不等价于 $M(u)$, 而且对于很多其它的 N-函数, 这些函数也不互相等价. 然而确实存在 N-函数 $M(u)$, 使 $e^{M(u)} - 1 \sim M(u)$ (請讀者自己作出实例).

不难对任何 N-函数 $M(u)$ 作出与它不等价的 N-函数 $Q(u)$ 和 $R(u)$,使

$$Q(u) \prec M(u) \prec R(u).$$

为此,由等式

$$r(u) = np(nu) \text{ 当 } n-1 \leqslant u < n \text{ 时 } (n = 1, 2, \cdots)$$

确定了函数 $R(u)$ 的右导数 $r(u)$, 又函数 $Q(u)$ 可以确定为满足条件:

$$N(v) \prec \Psi(v), \text{ 而 } \Psi(v) \text{ 不等价于 } N(v),$$

的 N-函数 $\Psi(v)$ 的余 N-函数, 其中 $N(v)$ 是函数 $M(u)$ 的余 N-函数.

容易看出, 所作出的函数 $Q(u)$ 和 $R(u)$ 具有下列性质: 对每一个 $n = 1, 2, \cdots$, 相应的有 u_n^*, 使当 $u > u_n^*$ 时

$$Q(u) < M\left(\frac{u}{n}\right) < M(nu) < R(u). \tag{3.17}$$

在本节的最后, 我們来証明对每一个 N-函数 $M(u)$ 相应的有这样的 N-函数 $\Phi(u)$,使关系式 $M(u) \prec \Phi(u)$ 和 $\Phi(u) \prec M(u)$ 均不成立. 为此,我們首先作出满足关系式 (3.17) 的 N-函数 $Q(u)$

与 $R(u)$. 不失普遍性,可以認为

$$Q(u) < R(u) \quad (u \geqslant u_0),$$

其中 u_0 是某个正数. 让我們描繪所要作出的函数 $\Phi(u)$ 的图形(图 6).

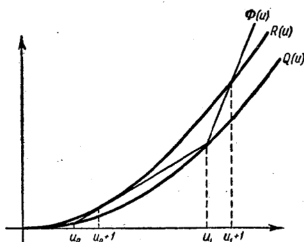


图 6

首先假定当 $0 \leqslant u \leqslant u_0$ 时 $\Phi(u) = Q(u)$. 其次,过点 $\{u_0, Q(u_0)\}$ 和 $\{u_0+1, R(u_0+1)\}$ 引直綫, 由于(1.16)这条直綫还与函数 $Q(u)$ 的图形交于另一点,表这点的横坐标为 u_1. 再过点 $\{u_1, Q(u_1)\}$ 和 $\{u_1+1, R(u_1+1)\}$ 引新直綫,它又与函数 $Q(u)$ 的图形相交,交点的横坐标記为 u_2. 継續这个过程, 就得到联結点 $\{u_0, Q(u_0)\}$, $\{u_1, Q(u_1)\}$, $\{u_2, Q(u_2)\}$ 等等的折綫. 这条折綫就是当 $u \geqslant u_0$ 时 N-函数 $\Phi(u)$ 的图形.

根据 $\Phi(u)$ 的作法,它具有以下的性质:

$$\Phi(u_n) = Q(u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.18}$$

和

$$\Phi(u_n + 1) = R(u_n + 1) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{3.19}$$

假設 $\Phi(u) \prec M(u)$,那么能找到 k 和 $u^* > 0$,使

$$\Phi(u) \leqslant M(ku) \quad (u \geqslant u^*). \tag{3.20}$$

由于(3.17)又能找到 $u_n > u^*$,使

$$M[k(u_n + 1)] < R(u_n + 1).$$

再由于(3.19)

$$M[k(u_n+1)] < \Phi(u_n+1),$$

这与(3.20)矛盾.

类似地可以証明,关系式 $M(u) \prec \Phi(u)$ 不成立.

我們让讀者自己証明,对于任意的 N-函数列 $M_n(u)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 存在有 N-函数 $\Phi(u)$ 与 $\Psi(u)$,使 $\Phi(u) \prec M_n(u) \prec \Psi(u)$,并且 $\Phi(u)$ 与 $\Psi(u)$ 不等价于函数 $M_n(u)$ 中的任何一个.

§4. Δ_2-条 件

1. 定义. 我們称 N-函数 $M(u)$ 对較大的 u 值满足 Δ_2-条件,如果存在常数 $k>0$, $u_0 \geqslant 0$, 使

$$M(2u) \leqslant kM(u) \quad (u \geqslant u_0). \tag{4.1}$$

容易看出,总有 $k>2$,因为由(1.17)当 $u \neq 0$ 时

$$M(2u) > 2M(u).$$

Δ_2-条件等价于对較大的 u 值满足不等式

$$M(lu) \leqslant k(l)M(u), \tag{4.2}$$

其中 l 可以是任何大于 1 的数.

事实上,假設 $2^n \geqslant l$,则从(4.1)当 $u \geqslant u_0$ 时得到

$$M(lu) \leqslant M(2^n u) \leqslant k^n M(u) = k(l)M(u).$$

反之,如果 $2 \leqslant l^n$,则从(4.2)得到

$$M(2u) \leqslant M(l^n u) \leqslant k^n(l)M(u).$$

N-函数 $M(u) = a|u|^\alpha (\alpha > 1)$ 可以作为对于一切 u 值均满足 Δ_2-条件的函数的最簡单例子,因为

$$M(2u) = a2^\alpha |u|^\alpha = 2^\alpha M(u).$$

显然,对于較大的 u 值满足 Δ_2-条件,如果

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty. \tag{4.3}$$

同样不难看出,对于一切 u 值满足 Δ_2-条件,即对一切 $u \geqslant 0$ 满足不等式(4.1),等价于条件(4.3)和条件

$$\overline{\lim_{u\to 0}} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty. \tag{4.4}$$

如果 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，則任何等价于 $M(u)$ 的 N-函数也满足此条件. 事实上，假設 $M_1(u) \sim M(u)$，这就表明能找到数 $\alpha < \beta$ 与 $u_1 \geqslant 0$，使

$$M(\alpha u) \leqslant M_1(u) \leqslant M(\beta u) \quad (u \geqslant u_1).$$

因而，当 $u \geqslant \max\{u_0, u_1\}$ 时

$$M_1(2u) \leqslant M(2\beta u) \leqslant k\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right) M(\alpha u) \leqslant k\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right) M_1(u).$$

注意，在每一个满足 Δ_2-条件的等价 N-函数类中，有对于一切 u 值满足不等式(4.1)的 N-函数. 事实上，假設 $M(u)$ 当 $u \geqslant u_0$ 时满足不等式(4.1)，如同証明定理 3.3 时一样，用等式

$$M_1(u) = \begin{cases} \dfrac{M(u_0)}{u_0^{\alpha}} |u|^{\alpha} & \text{当 } |u| \leqslant u_0 \text{ 时}, \\ M(u) & \text{当 } |u| \geqslant u_0 \text{ 时} \end{cases} \tag{4.5}$$

确定 N-函数 $M_1(u)$，其中 $\alpha = \dfrac{u_0 p(u_0)}{M(u_0)} > 1$，那么对于一切 u 值

$$M_1(2u) \leqslant \max[2^{\alpha}, k] M_1(u).$$

2. Δ_2-条件的判别法.

定理 4.1. *欲 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，必須且只須存在常数 α 与 $u_0 > 0$，使当 $u \geqslant u_0$ 时*

$$\frac{up(u)}{M(u)} < \alpha, \tag{4.6}$$

其中 $p(u)$ 是 N-函数 $M(u)$ 的右导数.

証. 因为总有 $up(u) > M(u)$，那么 $\alpha > 1$. 假定 $u \geqslant u_0$，則由(4.6)得到

$$\int_u^{2u} \frac{p(t)}{M(t)} dt < \alpha \int_u^{2u} \frac{dt}{t} = \alpha \ln 2,$$

即有 $M(2u) < 2^{\alpha} M(u)$. 这样一来，条件(4.6)的充分性就証明了.

今假設当 $u \geqslant u_0$ 时

$$M(2u) \leqslant kM(u),$$

那么

$$kM(u) \geqslant M(2u) = \int_0^{2u} p(t)dt > \int_u^{2u} p(t)dt > up(u),$$

即当 $u \geqslant u_0$ 时满足不等式(4.6).

定理証毕.

由上述証明可見，$M(u)$ 对于一切 $u > 0$ 满足 Δ_2-条件，如果它对于一切 $u > 0$ 满足不等式(4.6).

定理 4.1 使我們能簡単地証明，满足 Δ_2-条件的 N-函数 $M(u)$ 不比冪函数增加得快. 事实上，当其满足 Δ_2-条件时，从(4.6)就得到

$$\int_{u_0}^{u} \frac{p(t)}{M(t)} dt < \alpha \int_{u_0}^{u} \frac{dt}{t},$$

即当 $u \geqslant u_0$ 时

$$M(u) < \frac{M(u_0)}{u_0^{\alpha}} u^{\alpha}. \tag{4.7}$$

不难驗証，N-函数满足 Δ_2-条件，如果它的右导数 $p(u)$ 满足不等式

$$p(2u) \leqslant lp(u) \quad (u \geqslant u_0), \tag{4.8}$$

其中 $l > 1$, $u_0 \geqslant 0$.

特別，不等式(4.8)满足，若函数 $p(u)$ 对于大的自变量的値是凹的，即对于較大的 u_1 和 u_2

$$p\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \geqslant \frac{p(u_1) + p(u_2)}{2}.$$

3. 对余 N-函数的 Δ_2-条件. 我們有兴趣的是下面的問題：直接从給定的 N-函数 $N(v)$ 指出它的余 N-函数 $M(u)$ 是否满足 Δ_2-条件？

定理 4.2. 欲 N-函数 $N(v)$ 的余函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，必須且只須存在常数 $l > 1$ 和 $v_0 \geqslant 0$，使

$$N(v) \leqslant \frac{1}{2l} N(lv) \quad (v \geqslant v_0). \tag{4.9}$$

証. 假設条件(4.9)满足，令 $N_1(v) = \dfrac{1}{2l} N(lv)$. 由于等式

(2.5)，$N_1(v)$ 的余 N–函数 $M_1(u)$ 被等式 $M_1(u)=\frac{1}{2l}M(2u)$ 确定．又不等式(4.9)可写成

$$N(v)\leqslant N_1(v),$$

于是由定理 2.1 得出，当自变量的值較大时

$$M_1(u)\leqslant M(u),$$

也就是

$$M(2u)\leqslant 2lM(u).$$

可类似地証明从(4.1)推出(4.9)．

定理証毕．

如果对于一切 $v>0$ (4.9) 满足，則对于一切 u，$M(u)$ 满足 Δ_2–条件．

在前一段中曾經指出，N–函数满足 Δ_2–条件，如果它的导数当自变量的值較大时是凹的．显然，函数是凹的，如果它的反函数是凸的．这样一来，N–函数满足 Δ_2–条件，如果它的余 N–函数有凸的导数．

为了証明次一定理，我們需要下面的輔助命題．

引理 4.1． 假設函数 $p(u)$ 和 $q(v)$ 連續，則欲满足不等式(4.6)，必須且只須对于較大的 v 值有不等式

$$\frac{vq(v)}{N(v)}>\frac{\alpha}{\alpha-1}. \tag{4.10}$$

証． 例如，我們証明从(4.6)可推出(4.10)．由于(2.7)

$$M(u)=up(u)-N[p(u)].$$

因此从(4.6)得出

$$\frac{up(u)}{up(u)-N[p(u)]}<\alpha \quad (u\geqslant u_0),$$

于是

$$\frac{up(u)}{N[p(u)]}>\frac{\alpha}{\alpha-1} \quad (u\geqslant u_0). \tag{4.11}$$

在此不等式中令 $u=q(v)$ (因为函数 $p(u)$ 和 $q(v)$ 連續，故有 $p(u)=v$) 即得(4.10)．类似地可以証明从(4.10)能够推出(4.6)．

引理証毕.

由上面所証明的引理和定理 4.1 即可得出定理 4.3.

定理 4.3. 假設 N-函数 $N(v)$ 当 v 的值較大时有单調增加的連續导数, 則其余 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件当且仅当对于較大的 v 值有不等式

$$\frac{vq(v)}{N(v)} > \alpha_1, \tag{4.12}$$

其中 $\alpha_1 > 1$.

为証此只須指出, 从函数 $q(v)$ 的单調性即可得出函数 $p(u)$ 的連續性.

与定理 4.1 的情况一样, N-函数 $M(u)$ 对一切 u 滿足 Δ_2-条件, 如果对一切 $u > 0$ 不等式(4.12)滿足.

4. 例. 我們已經指出, N-函数 $M(u) = a|u|^\alpha (\alpha > 1)$ 对于一切 u 值滿足 Δ_2-条件.

作为例子我們来研究 N-函数

$$M(u) = |u|^\alpha(\ln|u| + 1). \tag{4.13}$$

对于此函数, 当 $u > 1$ 时

$$\frac{up(u)}{M(u)} = \frac{\alpha + \alpha\ln u + 1}{\ln u + 1},$$

于是

$$\lim_{u\to\infty}\frac{up(u)}{M(u)} = \alpha.$$

因此由定理 4.1 便知 N-函数(4.13)对于較大的 u 值滿足 Δ_2-条件. 直接計算之可得

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(2u)}{M(u)} = \lim_{u\to 0}\frac{M(2u)}{M(u)} = 2^\alpha,$$

即滿足条件(4.3)和(4.4), 这表明 N-函数(4.13)对一切 u 滿足 Δ_2-条件.

我們讓讀者自己証明, N-函数(4.13)的余 N-函数也滿足 Δ_2-条件.

N-函数

$$N(v) = e^{|v|} - |v| - 1 \tag{4.14}$$

不满足 Δ_2-条件，因为它比任何冪函数都增加得快. 函数 $N(v)$ 的导数等于 $e^v - 1$ ($v \geqslant 0$)，它是凸的，于是从前一段的附注得出，$N(v)$ 的余函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件. 不难看出，函数 $N(v)$ 满足条件(4.9). 也可以直接驗証，N-函数(4.14)的余函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，因为已經知道它的明显表达式(見(2.11))：

$$M(u) = (1 + |u|)\ln(1 + |u|) - |u|.$$

此时不难看出，对于一切的 u 满足 Δ_2-条件.

現在再来研究 N-函数

$$N(v) = e^{v^2} - 1, \tag{4.15}$$

我們已知其余函数 $M(u)$ 不能找到明显的表达式. 然而不难指出，对于自变量的一切值 $M(u)$ 都满足 Δ_2-条件. 为此可利用定理 4.2.

我們首先注意，函数 $\varphi(t) = e^{4t} - 4e^t + 3$ 当 $t > 0$ 时是单調增加的，因为 $\varphi'(t) = 4e^t(e^{3t} - 1) > 0$. 因此，当 $v > 0$ 时

$$\frac{e^{4v^2} - 1}{4} > e^{v^2} - 1.$$

上述不等式是对于函数(4.15)当 $l = 2$ 时的条件(4.9).

在研究上述例子时可能产生这样的猜测，两个互余 N-函数中至少有一个满足 Δ_2-条件. 此外，还可能产生这样的猜測，每一个比冪函数增加得慢的 N-函数一定满足 Δ_2-条件. 我們引用例子来說明这些猜測都是錯誤的.

作 N-函数 $M(u)$，它的导数 $p(t)$ 由等式

$$p(t) = \begin{cases} t, & \text{如果 } t \in [0, 1) \\ k!, & \text{如果 } t \in [(k-1)!\ \ k!) \quad (k = 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

确定.

为了証明 N-函数 $M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$ 不满足 Δ_2-条件，我們只須証存在着数列 $u_n \to \infty$，使

$$M(2u_n) > nM(u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{4.16}$$

假設

$$u_n = n! \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

則

$$M(2u_n) > \int_{n!}^{2n!} p(t)dt > (n+1)! \cdot n!,$$

而

$$nM(u_n) = n\int_0^{n!} p(t)dt < n \cdot n! \cdot n!,$$

于是得到(4.16).

显然,函数 $q(s)$ 由等式

$$q(s) = \begin{cases} s, & \text{如果 } s \in [0, 1), \\ (k-1)!, & \text{如果 } s \in [(k-1)!, k!) \quad (k = 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

确定.

我們指出 N-函数 $N(v) = \int_0^{|v|} q(s)ds$ 也不滿足 Δ_2-条件. 为此,考察数列 $v_n = n!(n = 1, 2, \cdots)$, 此时

$$N(2v_n) > \int_{n!}^{2n!} q(s)ds > n! \cdot n!,$$

而

$$nN(v_n) = n\int_0^{n!} q(s)ds < n \cdot n!(n-1)! = n! \cdot n!,$$

即 $N(2v_n) > nN(v_n)(n = 1, 2, \cdots)$. 此函数不比 $\frac{v^2}{2}$ 增加得快,因为 $q(s) \leqslant s(s \geqslant 0)$.

§5. Δ'-条 件

1. 定义. 我們称 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ'-条件,如果存在有正常数 c 和 u_0,使

$$M(uv) \leqslant cM(u)M(v) \quad (u, v \geqslant u_0). \tag{5.1}$$

引理 5.1. 如果 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ'-条件, 則它滿足 Δ_2-条件.

証. 假設 $k = cM(u_0 + 2)$,則当 $u \geqslant u_0 + 2$ 时

$$M(2u)\leqslant M[(u_0+2)u]\leqslant cM(u_0+2)M(u) = kM(u).$$

引理証毕.

假設 N–函数 $M(u)$ 满足 Δ'–条件，而 N–函数 $M_1(u)$ 等价于 $M(u)$. 我們指出，此时 $M_1(u)$ 也满足 Δ'–条件，即 Δ'–条件是彼此等价的 N–函数类的特性. 因为 $M(u)\sim M_1(u)$，則存在正常数 k_1, k_2 和 u_1，使

$$M(k_1u)\leqslant M_1(u)\leqslant M(k_2u)\quad (u\geqslant u_1). \tag{5.2}$$

为方便起見，我們認为，$k_1<1$, u_0, u_1, $k_2>1$.

由于引理 5.1，可以找到 $k_3>0$ 和 $u_2\geqslant 0$，使

$$M\left(\frac{\sqrt{k_2}}{k_1}u\right)\leqslant k_3M(u)\quad (u\geqslant u_2). \tag{5.3}$$

因而，当 $u, v\geqslant \max\left\{u_0, u_1, \frac{u_2}{k_1}\right\}$ 时

$$M_1(uv)\leqslant M(k_2uv)<cM(\sqrt{k_2}u)M(\sqrt{k_2}v)\leqslant$$
$$\leqslant ck_3^2M(k_1u)M(k_1v)\leqslant ck_3^2M_1(u)M_1(v).$$

我們还不知道在每一个满足 Δ'–条件的等价 N–函数类中，是否存在对于一切 u, v 都满足該条件的函数.

必須指出，满足 Δ'–条件的 N–函数类与满足 Δ_2–条件的 N–函数类有本質上的不同. 例如，考察函数 $M(u)=\dfrac{u^2}{\ln(e+|u|)}$. 它是 N–函数，因为它的导数 $p(u)=\dfrac{2u(u+e)\ln(u+e)-u^2}{(u+e)\ln^2(u+e)}$ $(u\geqslant 0)$ 满足条件(1.13)并且单調增加. 显然仅需証明最后的断言，它可从下列事实推出:

$$p'(u)=\frac{2}{(u+e)^2\ln^3(u+e)}\Big[(u+e)^2\ln^2(u+e)-$$
$$-2u(u+e)\ln(u+e)+u^2+\frac{u^2\ln(u+e)}{2}\Big]>$$
$$>\frac{2}{(u+e)^2\ln^3(u+e)}[(u+e)\ln(u+e)-u]^2\geqslant 0$$
$$(u>0).$$

N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，因为

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(2u)}{M(u)}=4.$$

此函数不满足 Δ'-条件，因为

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(u^2)}{M^2(u)}=\infty.$$

2. 满足 Δ'-条件的充分判别法.

定理 5.1. 假設存在数 $u_0>1$，使得对于每一确定的 $u\geqslant u_0$，函数

$$h(t)=\frac{p(ut)}{p(t)}$$

当 $t\geqslant u_0$ 时是非增的，则 N-函数

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt$$

满足 Δ'-条件.

証. 假設 $u, v\geqslant u_0$，于是由定理的条件，

$$\frac{p(ut)}{p(t)}\leqslant\frac{p(uu_0)}{p(u_0)}\quad(t\geqslant u_0).$$

利用上述不等式于表达式

$$M(uv)=\int_0^{uv}p(t)dt=u\int_0^v p(ut)dt=$$

$$=u\int_0^{u_0}p(ut)dt+u\int_{u_0}^v p(ut)dt$$

中，得到

$$M(uv)\leqslant uu_0p(uu_0)+u\frac{p(uu_0)}{p(u_0)}\int_0^v p(t)dt=$$

$$=uu_0p(uu_0)\left[1+\frac{M(v)}{u_0p(u_0)}\right].$$

又因为

$$uu_0p(uu_0)<\frac{1}{u_0-1}\int_{uu_0}^{uu_0^2}p(t)dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{u_0-1}\int_0^{uu_0^2}p(t)dt=\frac{M(uu_0^2)}{u_0-1},$$

則

$$M(uv) \leqslant \frac{M(uu_0^2)}{u_0 - 1}\left[1 + \frac{M(v)}{u_0 p(u_0)}\right]. \tag{5.4}$$

从最后的不等式得出，N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件. 事实上，从(5.4)于 $u = u_0$ 时可推出

$$M(u_0 v) \leqslant \frac{2M(u_0^3)}{(u_0 - 1)u_0 p(u_0)} M(v) \quad 当 \quad v \geqslant v_0,$$

其中 v_0 是使 $M(v_0) > u_0 p(u_0)$ 的数.

由 Δ_2-条件可找到数 $k > 0$，使当 $u \geqslant v_0$ 时

$$M(uu_0^2) \leqslant kM(u).$$

这意味着从(5.4)得出

$$M(uv) \leqslant \frac{2k}{(u_0 - 1)u_0 p(u_0)} M(u)M(v) \quad (u, v \geqslant v_0).$$

定理証毕.

現在假定对于較大的 t 值函数 $p(t)$ 可微.

引理 5.2. 函数

$$h(t) = \frac{p(ut)}{p(t)}$$

对于确定的 $u \geqslant u_0 > 1$ 当 $t \geqslant u_0$ 时非增，如果函数

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)}$$

当 $t \geqslant u_0$ 时非增.

証. 函数 $h(t)$ 当 $t \geqslant u_0$ 时非增的充要条件为它的导数

$$h'(t) = \frac{up'(ut)p(t) - p'(t)p(ut)}{p^2(t)}$$

当 $t \geqslant u_0$ 时是非正的，即

$$\frac{up'(ut)}{p(ut)} \leqslant \frac{p'(t)}{p(t)}.$$

而最后的不等式可从引理的条件直接得出.

引理証毕.

从这个引理和定理 5.1 得到

定理 5.2. 假設对于較大的 t 值函数 $p(t)$ 可微，并且函数

$$g(t)=\frac{tp'(t)}{p(t)} \tag{5.5}$$

非增，則 N-函数

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt$$

滿足 Δ'-条件.

3. 余函数的 Δ'-条件.

定理 5.3. 假設 N-函数 $M(u)$ 的导数 $p(u)$ 当 $u\geqslant u_0>1$ 时可微，并且函数

$$g(t)=\frac{tp'(t)}{p(t)}$$

当 $t\geqslant u_0$ 时非減，則 N-函数 $M(u)$ 的余 N-函数

$$N(v)=\int_0^{|v|}q(s)ds$$

滿足 Δ'-条件.

証. 因为函数 $g(t)$ 非減，則对充分大的 t 它取正值，这意味着，对自变量較大的值 $p'(t)>0$. 于是得出函数 $p(t)$ 的反函数 $q(s)$ 的可微性.

由引理 5.2，为了証明此定理，只要能找到 $s_0>1$，使当 $s\geqslant s_0$ 时函数

$$g_1(s)=\frac{sq'(s)}{q(s)}$$

非增.

假定 $s=p(t)$，則当 $t>t_0=\max\{u_0,\ q(1)\}$，$s>s_0=p(t_0)>1$ 时有

$$q'(s)=\frac{1}{p'(t)},$$

$$g_1(s)=\frac{sq'(s)}{q(s)}=\frac{p(t)}{tp'(t)}=\frac{1}{g(t)}.$$

又因为函数 $g(t)$ 非減，故函数 $g_1(s)$ 非增.

定理証毕.

在下一节里,我們将分出满足 Δ'-条件的 N-函数类.

4. 例. 如果

$$M_1(u)=\frac{|u|^\alpha}{\alpha}\quad(\alpha>1),$$

則显然对于一切 u, v

$$M_1(uv)=\alpha M_1(u)M_1(v),$$

卽 $M(u)$ 满足 Δ'-条件.

N-函数

$$M_2(u)=|u|^\alpha(|\ln|u||+1)\quad(\alpha>1).$$

給出对一切 u, v 满足 Δ'-条件的 N-函数的第二个例子.

事实上,

$$\begin{aligned}M_2(uv)&=|uv|^\alpha(|\ln|uv||+1)\leqslant\\&\leqslant|u|^\alpha|v|^\alpha(|\ln|u||+|\ln|v||+1)\leqslant\\&\leqslant|u|^\alpha(|\ln|u||+1)\cdot|v|^\alpha(|\ln|v||+1)=\\&=M_2(u)M_2(v).\end{aligned}$$

現在考察 N-函数

$$M_3(u)=(1+|u|)\ln(1+|u|)-|u|.$$

函数

$$Q(u)=u\ln u$$

对于較大的 u 值是凸的,并且满足条件(3.6). 由于定理 3.3,函数 $Q(u)$ 是某个 N-函数 $\Phi(u)$ 的主部: гл. ч. $\Phi(u)=Q(u)$.

又由于定理 5.2,函数 $\Phi(u)$ 满足 Δ'-条件,因为

$$g(t)=\frac{\ln t+1}{\ln t}=1+\frac{1}{\ln t}.$$

N-函数 $\Phi(u)$ 和 $M_3(u)$ 满足条件 (3.4),因而是等价的,这意味着,N-函数 $M_3(u)$ 满足 Δ'-条件.

看来 N-函数 $M_3(u)$ 不是对一切的 u, v 都满足 Δ'-条件. 事实上,如果存在常数 c,使对一切 u, v 均有

$$M(uv)\leqslant cM(u)M(v),$$

則函数

$$f(u, v) = \frac{M(u)M(v)}{M(uv)} =$$

$$= \frac{[(1+|u|)\ln(1+|u|)-|u|][(1+|v|)\ln(1+|v|)-|v|]}{(1+|uv|)\ln(1+|uv|)-|uv|}$$

的值以正数 $\frac{1}{c}$ 为下界。 但若假定 $u = n$, $v = \frac{1}{\sqrt{n}}$，則容易驗証

$$\lim_{n\to\infty} f\left(n, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

作为最后一个例子，我們指出，利用定理 5.3 能够驗証 N-函数

$$M(u) = (1+|u|)^{\sqrt{\ln(1+|u|)}} - 1$$

的余 N-函数 $N(v)$ 滿足 Δ'-条件。对于 $M(u)$ 函数

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)} = \left[\frac{3}{2}\sqrt{\ln(1+t)} - 1 + \frac{1}{2\ln(1+t)}\right]\frac{1}{1+t}$$

当 t 值較大时单調增加，因为它的导数

$$g'(t) = \frac{t}{(1+t)^2}\left[\frac{3}{2\sqrt{\ln(1+t)}} - \frac{1}{2\ln^2(1+t)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{(1+t)^2}\left[\frac{3}{2}\sqrt{\ln(1+t)} - 1 + \frac{1}{2\ln(1+t)}\right]$$

是正的。

§6. 較冪函数增加得快的 N-函数

1. Δ_3-条件. 我們称 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_3-条件，如果它等价于 N-函数 $|u|M(u)$。因为当 $u>1$ 时总有 $|u|M(u) > M(u)$，所以 Δ_3-条件意味着，当 u 值大于某 u_0 时

$$|u|M(u) < M(ku), \tag{6.1}$$

其中 k 是某一常数。

如果 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_3-条件，則容易看出，等价于 $M(u)$ 的一切 N-函数均滿足此条件。

具有主部 e^u, e^{u^2}, $u^{\ln u}$ 等等的 N-函数 $M(u)$，可以作为滿足 Δ_3-条件的 N-函数的例子，因为它們显然滿足条件(6.1)。

在所有引用的例子中，N-函数 $M(u)$ 比任何幂函数增加得快．这并不是偶然的，因为每一个满足 Δ_3-条件的 N-函数 $M(u)$，都比任何幂函数 u^n 增加得快．事实上，由(6.1)当 $u \geqslant u_0 k^n$ 时

$$M(u) > \frac{u}{k} M\left(\frac{u}{k}\right) > \frac{u^2}{k^3} M\left(\frac{u}{k^2}\right) > \cdots >$$

$$> \frac{u^n}{k^{\frac{n(n+1)}{2}}} M\left(\frac{u}{k^n}\right) > \frac{M(u_0)}{k^{\frac{n(n+1)}{2}}} u^n.$$

然而并非一切比任何幂函数增加得快的 N-函数都满足 Δ_3-条件，例如，对于 гл. ч. $M(u) = u^{\sqrt{\ln u}}$ 的 N-函数 $M(u)$ 就不满足此条件，因为它对于任何 $k > 0$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(ku)}{|u| M(u)} = 0.$$

2. 余函数的估計式．

定理 6.1． 假設 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_3-条件，則其余 N-函数 $N(v)$ 对于較大的 v 值满足不等式

$$k_1 v M^{-1}(k_1 v) \leqslant N(v) \leqslant k_2 v M^{-1}(k_2 v), \tag{6.2}$$

其中 $M^{-1}(v)$ 是函数 $M(u)$ 的反函数，$k_1 \leqslant k_2$ 是常数．

証．我們首先指出，N-函数

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} M(t)dt$$

等价于 N-函数 $M(u)$．事实上，根据定理的条件，当 u 較大时

$$M_1(u) = \int_0^u M(t)dt < uM(u) \leqslant M(ku),$$

其中 k 是常数．另一方面，当 $u > 1$ 时

$$M_1(2u) = \int_0^{2u} M(t)dt > \int_u^{2u} M(t)dt > uM(u) > M(u).$$

可見 $M_1(u) \sim M(u)$．

因此 $M_1(u)$ 的余函数 $N_1(v)$ 等价于 $N(v)$．显然我們可以直接写出函数 $N_1(v)$：

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} M^{-1}(t)dt, \tag{6.3}$$

于是得到

$$N_1(v) < |v| M^{-1}(|v|)$$

和

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} M^{-1}(t)dt > \int_{\frac{|v|}{2}}^{|v|} M^{-1}(t)dt > \frac{|v|}{2} M^{-1}\left(\frac{|v|}{2}\right).$$

从最后的不等式和 $N_1(v) \sim N(v)$ 即可推出(6.2).

定理証毕.

注意，当 v 充分大时，不等式(6.2)的左端对于任何函数 $M(u)$ (沒有关于 Δ_3-条件的假設)和任何常数 $k_1 < 1$ 都是正确的. 事实上，从楊格不等式得出，当 v 較大时

$$k_1 v M^{-1}(k_1 v) \leqslant k_1 N(v) + k_1^2 v < N(v).$$

3. 等价余 N-函数的构造. 我們已經指出，仅在个别的情况下余 N-函数才可能有明显的表达式. 然而对于应用来說，在很多情况下并不需要知道余函数的精确公式，而只要知道任何与它等价的 N-函数的公式就够了. 現在来說明对于某些 N-函数类我們能够給出等价余 N-函数的公式，而其中的一类就可以借助 Δ_3-条件加以表示.

从定理 6.1 直接得出

定理 6.2. 假設 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_3-条件，又假設函数 $Q(v) = |v| M^{-1}(|v|)$ 是某 N-函数 $\Psi(v)$ 的主部，則 $\Psi(v) \sim N(v)$.

为了使得函数 $Q(v)$ 是某 N-函数的主部，显然只須当 $v \to \infty$ 时函数 $Q'(v)$ 单調增加地趋向于无穷. 因为当 $v > 0$ 时

$$Q'(v) = M^{-1}(v) + \frac{v}{p[M^{-1}(v)]},$$

所以

$$\lim_{v \to \infty} Q'(v) = \infty.$$

易見欲使 $Q'(u)$ 单調增加，又只須 $Q''(v)$ 对于較大的 v 值是非負的. 而最后的条件滿足，如果对于較大的 u 值

$$2p^2(u) - M(u)p'(u) \geqslant 0. \tag{6.4}$$

例如，гл. ч. $M_1(u) = e^u$, гл. ч. $M_2(u) = e^{u^2}$, гл. ч. $M_3(u) = u^{\ln u}$ 的 N-函数 $M_1(u)$, $M_2(u)$, $M_3(u)$ 就滿足这个不等式. 因此它們的

余 N-函数相应地等价于 N-函数 $\Psi_1(v)$, $\Psi_2(v)$, $\Psi_3(v)$ 而

$$\text{гл. ч. } \Psi_1(v) = v\ln v, \quad \text{гл. ч. } \Psi_2(v) = v\sqrt{\ln v},$$

$$\Psi_3(v) = v^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln v}}} \text{ 的主部.} \qquad (6.5)$$

前面我們曾經指出，滿足 Δ_3-条件的 N-函数 $M(u)$ 比任何冪函数 $|u|^\alpha(\alpha > 1)$ 都增加得快，这表明

$$M(u) > \frac{u^\alpha}{\alpha}\ (u \geqslant u_0),$$

其中 u_0 是某个非負数. 因而对于余函数从定理 2.1 可推出

$$N(v) < \frac{v^\beta}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right).$$

这样一来，滿足 Δ_3-条件的 N-函数的余 N-函数比任何冪函数 $v^\beta(\beta > 1)$ 都增加得慢. 例如(6.5)的函数就是如此.

在考察比任何冪函数增加得慢的 N-函数时，自然产生这样的猜測：它是某个滿足 Δ_3-条件的 N-函数的余函数. 这个猜測在許多情况下能够实現. 例如，考慮 N-函数 $N(v)$，对于它 гл. ч. $N(v) = v(\ln v)^2$. 如果将它写成

$$N(v) = vQ^{-1}(v) \text{ 的主部},$$

則 $Q(u) = e^{\sqrt{u}}$. 显然 $Q(u)$ 是某个滿足 Δ_3-条件的 N-函数 $M_1(u)$ 的主部. 由于定理 6.2, $N(v)$ 等价于 $N_1(v)$.

前面例子所进行的討論，包含了作出相当广泛的一类比任何冪函数增加得慢的 N-函数的等价余 N-函数的普遍方法. 假設已給 N-函数 $N(v)$，把它写成 $N(v) = |v|Q^{-1}(|v|)$. 如果判明函数 $Q(u)$ 是滿足 Δ_3-条件的 N-函数 $M_1(u)$ 的主部，則从定理 6.2 可知 $M_1(u) \prec M(u)$，其中 $M(u)$ 是 $N(v)$ 的余 N-函数.

我們还可能从另外的途径作出比任何冪函数 $v^\beta(\beta > 1)$ 增加得慢的 N-函数的等价余 N-函数. 假設 $q(v) = N'(v)$，并且函数 гл. ч. $q^{-1}(u) = M_1(u)$，其中 $M_1(u)$ 是滿足 Δ_3-条件的 N-函数. 于是从定理 6.1 的証明过程中可知

$$M_1(u) \sim M_2(u) = \int_0^{|u|} M_1(t)\,dt.$$

这就意味着与 $M_1(u)$ 及 $M_2(u)$ 相应的余 N-函数 $N_1(v)$ 及 $N_2(v)$ 等价，并且

$$N_2(v)=\int_0^{|v|}M_1^{-1}(s)ds.$$

因为当 v 的值很大时 $M_1^{-1}(v)=q(v)$，所以 $N_2(v)\sim N(v)$，因而 $M_2(u)\sim M(u)$. 于是 N-函数 $M_1(u)$ 即为所求的等价于 $M(u)$ 的函数.

4. 余函数的复合函数. 假設 $M(u)$ 和 $Q(u)$ 都是 N-函数.

N-函数 $M(u)$ 和 $M[Q(u)]$ 任何时候也不会等价，因为对于任何 $k>0$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M[Q(u)]}{M(ku)}=\infty.$$

而这一点又可从下列事实推出，由于对于充分大的 u

$$Q(u)>nku,\ M(nku)>nM(ku),$$

其中 n 是任何已給定的数，所以

$$\frac{M[Q(u)]}{M(ku)}>\frac{M(nku)}{M(ku)}>n.$$

然而，N-函数 $M(u)$ 和 $Q[M(u)]$ 在某种情况下还是可能等价的. 在此情况下，如果 $M_1(u)\sim M(u)$ 和 $Q_1(u)\sim Q(u)$，那末函数 $M_1(u)$ 和 $Q_1[M_1(u)]$ 等价当且仅当 N-函数 $M(u)$ 和 $Q[M(u)]$ 等价.

我們再作一个明显的附注：如果 $M(u)\sim Q[M(u)]$，則 $M(u)\sim Q[Q[\cdots Q[M(u)]]]$.

定理 6.3. 欲 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_3-条件，必須且只須关系式

$$N[M(u)]\sim M(u)$$

满足，其中 $N(v)$ 是 $M(u)$ 的余函数.

証. 假設 $M(u)$ 满足 Δ_3-条件. 今証 $N_1[M(u)]\sim M(u)$，其中 $N_1(v)$ 是由等式(6.3)所定义的 N-函数. 因为 $N_1(v)\sim N(v)$，所以定理条件的必要性就証明了.

根据函数 $N_1(v)$ 的定义

$$N_1(v) \leqslant |v| M^{-1}(|v|),$$

于是对于較大的 u 值

$$N_1[M(u)] \leqslant M(u)u \leqslant M(ku),$$

这是因为 $|u|M(u) \sim M(u)$.

另一方面，对于任意 N-函数 $N_1(v)$，当自变量的值較大时

$$N_1[M(u)] > M(u).$$

这样一来，$N_1[M(u)] \sim M(u)$.

現在来証明定理条件的充分性. 設 $N[M(u)] \sim M(u)$，即对于自变量較大的值有 $N[M(u)] \leqslant M(k_1u)$. 又因为由琴生不等式，当自变量的值較大时

$$vM^{-1}(v) \leqslant N(v) + v < 2N(v).$$

因此对較大的 u 值

$$uM(u) \leqslant 2N[M(u)] \leqslant 2M(k_1u) < M(2k_1u).$$

这样一来，N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_3-条件.

定理証毕.

假設 $M(u)$ 与 $Q(u)$ 是两个 N-函数，其中的第一个滿足 Δ_3-条件. 今証复合函数 $M[Q(u)]$ 与 $Q[M(u)]$ 仍然滿足 Δ_3-条件. 此結論的正确性可以从当自变量的值較大时

$$uM[Q(u)] \leqslant Q(u)M[Q(u)] \leqslant M[kQ(u)] \leqslant M[Q(ku)]$$

和

$$uQ[M(u)] \leqslant Q[uM(u)] \leqslant Q[M(ku)]$$

这一串明显的不等式得出.

5. Δ^2-条件. 在許多情况中，$M(u)$ 和 $Q[M(u)]$ 等价仅当 $Q(u)$ 眞正比函数 $M(u)$ 的余函数 $N(v)$ 增加得快. 今后我們有兴趣的是 $Q(v) = v^2$ 的情形.

我們称 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ^2-条件，如果

$$M(u) \sim M^2(u),$$

即如果存在这样的 $k > 1$，使对一切充分大的 u

$$M^2(u) \leqslant M(ku). \tag{6.6}$$

容易看出，N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ^2-条件，如果对于某个 $\alpha > 1$，

$M(u) \sim M^{\alpha}(u)$. 反之,如果 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ^2-条件,則对于任何 $\alpha > 1$, $M(u) \sim M^{\alpha}(u)$.

可以直接驗証, 如果 $M(u)$ 的任何一个等价 N-函数滿足 Δ^2-条件,則 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ^2-条件.

主部为 e^u, e^{u^2} 等等的 N-函数可以作为滿足 Δ^2-条件的函数的例子.

如果 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ^2-条件, 那末它滿足 Δ_3-条件. 事实上,从 Δ^2-条件得出,存在 $k > 1$, 使对較大的 u 值有 $M(ku) \geqslant \geqslant M^2(u)$. 又因当 u 值較大时 $M(u) > u$, 故 $M(ku) > uM(u)$,即滿足不等式(6.1). 这就表明 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_3-条件.

然而,滿足 Δ_3-条件的 N-函数类比滿足 Δ^2-条件的 N-函数类更为广泛. 例如, 主部为 $u^{\ln u}$ 的 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_3-条件, 而不滿足 Δ^2-条件,因为对于任何 $k > 0$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u^{2\ln u}}{(ku)^{\ln ku}} = \infty.$$

我們曾經在前面指出, 每一个滿足 Δ_2-条件的 N-函数比某个冪函数增加得慢,这个事实不仅仅对于 N-函数正确. 事实上,假設 $f(u)$ 是任意非負的非減函数并且当 $u \geqslant u_0$ 时滿足不等式

$$f(2u) \leqslant kf(u),$$

那么从 $2^n u_0 < u \leqslant 2^{n+1}u_0$ 可推出 $k^n < \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\ln_2 k}$ 和

$$f(u) \leqslant k^{n+1}f(u_0) \leqslant kf(u_0)\left(\frac{u}{u_0}\right)^{\ln_2 k}.$$

今考察当 $u \geqslant u_0$ 时滿足不等式

$$2f(u) < f(ku) \tag{6.7}$$

的非減函数 $f(u)$, 显然 $k > 1$. 假設 $k^n u_0 < u \leqslant k^{n+1}u_0$, 那么 $2^n \geqslant \left(\frac{u}{ku_0}\right)^{\ln_k 2}$ 并且

$$f(u) > f(k^n u_0) > 2^n f(u_0) \geqslant f(u_0)\left(\frac{u}{ku_0}\right)^{\ln_k 2}.$$

这样一来,从(6.7)得出,当 u 的值較大时

$$f(u) > u^{\alpha}, \tag{6.8}$$

其中 $\alpha < \ln_k 2$.

引理 6.1. 假設正的非減函数 $p(u)$ 当自变量的值較大时大于 1 并且滿足不等式

$$p^2(u) < p(ku), \tag{6.9}$$

则存在这样的 $\alpha > 0$, 使当 u 的值較大时

$$p(u) > e^{u^{\alpha}}.$$

証. 由引理的条件得知, 函数 $f(u) = \ln p(u)$ 滿足不等式(6.7). 因此它滿足不等式(6.8), 即

$$\ln p(u) > u^{\alpha}.$$

引理証毕.

由此引理可推出, 每一个滿足 Δ^2-条件的 N-函数, 当自变量的值較大时要比某个函数 $e^{u^{\alpha}}$ 增加得快.

定理 6.4. 假設 N-函数 $M(u)$ 的右导数 $p(u)$ 当 $u \geqslant u_0$ 时滿足条件(6.9), 则 $M(u)$ 滿足 Δ^2-条件.

証. 由于引理 6.1, 可以認为当 $u \geqslant u_0$ 时 $2u < p(ku)$. 因此当 $u \geqslant u_0$ 时

$$2up^2(u) < 2up(ku) < p^2(ku) < p(k^2u).$$

于是由不等式 $M(u) < up(u)$ 可推出, 当 $u > u_0$ 时

$$M^2(u) = 2\int_0^u M(t)p(t)dt \leqslant M^2(u_0) + $$
$$+ 2\int_{u_0}^u tp^2(t)dt < M^2(u_0) + $$
$$+ \int_0^u p(k^2t)dt < M^2(u_0) + M(k^2u).$$

又当 u 的值較大时 $M^2(u_0) < M(k^2u)$, 因此由上述不等式得到

$$M^2(u) < 2M(k^2u) < M(2k^2u).$$

定理証毕.

我們已經指出, 滿足 Δ^2-条件的 N-函数比某个形如 $e^{u^{\alpha}}(\alpha>0)$ 的函数增加得快. 反之并不成立. 請讀者自己举出这样的 N-函数的例子, 它比某个函数 $e^{u^{\alpha}}(\alpha > 0)$ 增加得快, 然而旣不滿足 Δ^2-

条件，也不满足 Δ_3-条件.

下列結論給出 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ^2-条件的簡明的判別法.

假設能找到这样的 $\alpha > 0$，使函数

$$\varphi(u) = \frac{\ln M(u)}{u^{\alpha}} \tag{6.10}$$

当 u 的值大于某个 u_0 时是非減的，則 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ^2-条件.

事实上，假設 $u \geqslant u_0$，則

$$M^2(u) = e^{2\ln M(u)} = e^{2u^{\alpha}\frac{\ln M(u)}{u^{\alpha}}} \leqslant e^{2u^{\alpha}\frac{\ln M(2^{\frac{1}{\alpha}}u)}{2u^{\alpha}}} = M(2^{\frac{1}{\alpha}}u).$$

此外又因为对于充分大的 u 值

$$M(u) < M^2(u),$$

所以

$$M(u) \sim M^2(u).$$

这就是我們所需要証明的結論.

我們已經指出，N-函数 $M(u)$ 与 $Q(u)$ 的复合函数 $M[Q(u)]$ 与 $Q[M(u)]$ 满足 Δ_3-条件，如果 N-函数 $M(u)$ 满足此条件. 今假設 $M(u)$ 满足 Δ^2-条件，此时 $M[Q(u)]$ 仍然满足 Δ^2-条件，这是因为对于較大的 u 值

$$M^2[Q(u)] < M[kQ(u)] < M[Q(ku)].$$

让我們来説明，这时 N-函数 $Q[M(u)]$ 可能不满足 Δ^2-条件，并且更进一步对于无論什么样的 N-函数 $M(u)$ 总可作出这样的 N-函数 $Q(u)$，使 $Q[M(u)]$ 不满足 Δ^2-条件.

假設

$$0 < v_0 < M(v_0) < v_1 < M(v_1) < \cdots < v_n < M(v_n) < \cdots.$$

定义 N-函数 $Q(u)$，它等于 u^2 当 $0 < u < M(v_0)$ 时，而在每一个区間 $M(v_{n-1}) \leqslant u \leqslant M(v_n)$ 上定义它为綫性函数 $Q(v_{n-1}) + k_n[u - M(v_{n-1})]$. 选择角系数 k_n 使其恆增，以使 $Q(u)$ 是凸函数. 并且更进一步可以要求这些角系数增加的速度达到这种程度，使对于一切 n 都能满足不等式

$$\{Q(v_{n-1}) + k_n[v_n - M(v_{n-1})]\}^2 >$$
$$> Q(v_{n-1}) + k_n[M(v_n) - M(v_{n-1})].$$

此时 N-函数 $Q(u)$ 满足不等式

$$Q^2(v_n) > Q[M(v_n)] \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

假設 $v_n = M(u_n)$. 不失一般性,我們可以認为 $M(u_n) > nu_n$, 那么从所得到的不等式可推出

$$Q^2[M(u_n)] > Q\{M[M(u_n)]\} > Q[M(nu_n)].$$

这表明复合函数 $Q[M(u)]$ 不满足 Δ^2-条件.

6. 余函数的性質.

定理 6.5. 假設 N-函数 $N(v)$ 满足 Δ_3-条件, 則 $M(u)$ 的余 N-函数 $N(v)$ 满足 Δ_2-条件.

證. 假設 k_1 和 k_2 是 (6.2) 所确定的常数, 则因 $M^{-1}(v)$ 是凹函数又 $\frac{2k_2}{k_1} > 1$, 故

$$M^{-1}\left(\frac{2k_2}{k_1}v\right) < \frac{2k_2}{k_1}M^{-1}(v).$$

因而由(6.2), 对于較大的 v 值

$$N(2v) \leqslant 2k_2vM^{-1}(2k_2v) < 2k_2v \cdot \frac{2k_2}{k_1}M^{-1}(k_1v) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2k_2}{k_1}\right)^2 N(v),$$

于是得到定理的結論.

定理 6.6. 假設 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ^2-条件, 則它的余 N-函数 $N(v)$ 满足 Δ'-条件.

證. 因为 $M(u)$ 满足 Δ^2-条件, 所以可以找到这样的常数 t_0, k, 使当 $t \geqslant t_0$ 时

$$M(kt) \geqslant M^2(t).$$

不失一般性, 可以認为 $t_0 > 1$.

假設 $t \geqslant s \geqslant t_0$, 那么

$$M(kts) > M(kt) > M^2(t) \geqslant M(t)M(s).$$

在最后的不等式中, 令 $t = M^{-1}(u)$, $s = M^{-1}(v)$, 則当 $u, v \geqslant M(t_0)$

时我們得到

$$M^{-1}(uv) \leqslant kM^{-1}(u)M^{-1}(v).$$

由于在最后的不等式中对称地含有 u 和 v，因此它对一切的 u、$v \geqslant M(t_0)$ 都正确.

因为 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ^2-条件，所以它也滿足 Δ_3-条件. 由于(6.2)能找到这样的 $u_0 \geqslant M(t_0)+1$，使当 $u \geqslant u_0$（或 $v \geqslant u_0$）时

$$k_1 u M^{-1}(k_1 u) \leqslant N(u) \leqslant k_2 u M^{-1}(k_2 u),$$

其中 k_1 和 k_2 是某个常数. 因而，当 $u, v \geqslant u_0$ 时

$$N(uv) \leqslant k_2 uv M^{-1}(k_2 uv) =$$
$$= (\sqrt{k_2}\, u)(\sqrt{k_2}\, v) M^{-1}(\sqrt{k_2}\, u \sqrt{k_2}\, v),$$

故得

$$N(uv) \leqslant k\sqrt{k_2}\, u M^{-1}(\sqrt{k_2}\, u)\sqrt{k_2}\, v M^{-1}(\sqrt{k_2}\, v),$$

最后有

$$N(uv) \leqslant kN\left(\frac{\sqrt{k_2}}{k_1}\, u\right)N\left(\frac{\sqrt{k_2}}{k_1}\, v\right).$$

于是由上述定理 N-函数 $N(v)$ 滿足 Δ_2-条件. 因此，从最后的不等式可推出，对于 u、v 較大的值

$$N(uv) \leqslant cN(u)N(v),$$

其中 c 是某个常数.

定理証毕.

定理 6.7. 假設 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_3-条件，則其余 N-函数 $N(v)$ 滿足 Δ'-条件的充要条件为对于 u 和 v 的較大值有不等式

$$M(uv) \geqslant M(\alpha u)M(\beta v), \tag{6.11}$$

其中 α, β 是某个数.

証. 假設滿足条件(6.11)，則对于較大的 u, v 不等式

$$M^{-1}(uv) \leqslant \frac{M^{-1}(u)M^{-1}(v)}{\alpha\beta}$$

成立. 由此不等式和定理 6.2 得到

$$N(uv) \leqslant k_2 uv M^{-1}(k_2 uv) \leqslant \frac{k_2 uv}{\alpha\beta} M^{-1}(k_2 u) M^{-1}(v) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha\beta} N\left(\frac{k_2}{k_1} u\right) N\left(\frac{1}{k_1} v\right),$$

同时因由定理 6.5 知 $N(v)$ 满足 Δ_2-条件,故

$$N(uv) \leqslant cN(u)N(v).$$

条件(6.11)的充分性証毕.

假設 $N(v)$ 滿足 Δ'-条件，由此及定理 6.2 表明，当 u, v 的值較大时

$$uvM^{-1}(uv) \leqslant kuM^{-1}(u)vM^{-1}(v).$$

因而得出,当自变量的値較大时

$$M(kuv) \geqslant M(u)M(v).$$

定理証毕.

由此定理及定理 6.6 可推出，滿足 Δ^2-条件的 N-函数一定滿足不等式(6.11). 此时还可以得到更強的結論: 如果 $M(u)$ 滿足 Δ^2-条件,则可以找到这样的 $u_0 > 0$,使当 u, $v \geqslant u_0$ 时

$$M(uv) \geqslant M(u)M(v). \tag{6.12}$$

应該取这样的数作为 u_0, 使当 $u \geqslant u_0$ 时 $M^2(u) \leqslant M(u_0 u)$. 于是当 $u \geqslant v \geqslant u_0$ 时

$$M(u)M(v) \leqslant M^2(u) \leqslant M(u_0 u) \leqslant M(uv).$$

条件(6.11)通常容易检驗. 例如，考察 N-函数 $M(u)$, гл. ч. $M(u) = u^{\ln u}$. 它滿足 Δ_3-条件. 又条件(6.11)意味着，对于較大的 u, v

$$e^{(\ln u+\ln v)^2} > e^{\ln^2 u} e^{\ln^2 v}.$$

7. 余函数的 Δ^2-条件的判別法. 在許多情况中，需要研究这样的 N-函数，它沒有明显的表达式，只是給出其余函数 $N(v)$ 的公式. 自然发生下面的問題(該問題在以前研究另外的 N-函数类时已經解决过): 如何由函数 $N(v)$ 来确定其余函数 $M(u)$ 是否滿足 Δ^2-条件?

我們首先建立关于任意 N-函数的一个引理.

假設 $\Phi(u)$ 是 N-函数，由(1.18)可知，函数 $\dfrac{\Phi(u)}{u}$ 当 $u>0$ 时是单調增加的，并且有 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi(u)}{u}=0$ 和 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\Phi(u)}{u}=\infty$. 因此函数

$$\Phi_1(u)=\int_0^{|u|}\frac{\Phi(t)}{t}\,dt$$

是 N-函数.

引理 6.2. $\Phi_1(u)\sim\Phi(u)$.

証. 显然 $\Phi_1(u)\leqslant\Phi(u)$；另一方面，当 $u>0$ 时

$$\Phi_1(u)=\int_0^u\frac{\Phi(t)}{t}\,dt>\int_{\frac{u}{2}}^u\frac{\Phi(t)}{t}\,dt>\Phi\left(\frac{u}{2}\right).$$

引理証毕.

定理 6.8. N-函数 $M(u)$ 满足 Δ^2-条件的充要条件为其余 N-函数 $N(v)$ 当自变量的值較大时满足不等式

$$\frac{N(v)}{v}<k\,\frac{N(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}, \tag{6.13}$$

其中 k 是某个数.

必要性的証明. 注意，满足 Δ^2-条件意味着，对于較大的 u 值

$$M^2(u)<M(k_1 u).$$

由此得知，对于較大的自变量的值

$$M^{-1}(v)\leqslant k_1M^{-1}(\sqrt{v}), \tag{6.14}$$

其中 $M^{-1}(v)$ 是 $M(u)$ 的反函数.

因为函数 $M(u)$ 满足 Δ_3-条件，所以由定理 6.1，对于很大的自变量的值

$$vM^{-1}(v)<N(k_2v) \tag{6.15}$$

和

$$N(v)\leqslant k_3vM^{-1}(k_3v). \tag{6.16}$$

由于(6.16)与(6.14)

$$\frac{N(v)}{v}<k_3M^{-1}(k_3v)<k_1k_3M^{-1}(\sqrt{k_3v}).$$

又由于(6.15)

$$\frac{N(v)}{v} < \frac{k_1 k_3}{\sqrt{k_3 v}} N(k_2\sqrt{k_3 v}). \qquad (6.17)$$

由于定理 6.5，函数 $N(v)$ 满足 Δ_2-条件，即对于較大的自变量的値

$$N(k_2\sqrt{k_3}\sqrt{v}) < k_4 N(\sqrt{v}).$$

因此，从(6.17)即可推出(6.13)，其中 $k = k_1 k_4 \sqrt{k_3}$.

充分性的証明． 考察函数 $r(v) = \frac{N(v)}{v}$. 由于引理 6.2，N-函数

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} r(t)dt$$

等价于函数 $N(v)$. 直接計算之可得 $N_1(v)$ 的余 N-函数

$$M_1(u) = \int_0^{|u|} r^{-1}(t)dt,$$

其中 $r^{-1}(t)$ 是单調增加函数 $r(t)$ 的反函数． 又 N-函数 $M_1(u)$ 等价于 N-函数 $M(u)$.

由于(6.13)，对于較大的自变量的値

$$[r^{-1}(u)]^2 < r^{-1}(ku).$$

由此不等式和定理 6.4 得知，N-函数 $M_1(u)$ 满足 Δ^2-条件，这就表明 $M(u)$ 也满足这个条件.

定理証毕.

注意，在条件(6.13)中总有 $k>1$，因为对于任何 N-函数 $N(v)$ 当 $v>1$ 时

$$\frac{N(v)}{v} > \frac{N(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}.$$

所有余函数满足 Δ^2-条件的 N-函数构成比任何函数 $|v|^\alpha (\alpha > 1)$ 都增加得慢的 N-函数类的子集，并且更进一步从引理 6.1，定理 2.1 及定理 6.1 可推出，这样的 N-函数对于自变量較大的値满足不等式

$$N(v) < v \ln^\beta v \quad (\beta > 0).$$

8. 再論 N-函数的复合函数. 在这一段里，我們要建立滿足 Δ_3-条件的 N-函数 $M_1(u)$ 与 $M_2(u)$ 的余 N-函数 $N_1(v)$ 与 $N_2(v)$ 的复合函数 $N_1[N_2(v)]$ 的几个性質.

首先証明一个对于任意 N-函数都正确的結論.

引理 6.3. 假設 $\Phi_1(v)$ 及 $\Phi_2(v)$ 是两个 N-函数，則函数

$$\Phi(v)=\frac{\Phi_1(v)\Phi_2(v)}{|v|}$$

也是 N-函数.

証. 因为函数 $\Phi(v)$ 是非負的偶函数，并且显然满足条件

$$\lim_{v\to 0}\frac{\Phi(v)}{v}=0,\quad \lim_{v\to\infty}\frac{\Phi(v)}{v}=\infty,$$

所以由 N-函数的第二种定义(参看 9 頁)，只要証明 $\Phi(v)$ 是凸函数，即

$$\Phi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left[\Phi(v_1)+\Phi(v_2)\right]. \tag{6.18}$$

由(1.18)，函数 $\dfrac{\Phi_1(v)}{v}$ 及 $\dfrac{\Phi_2(v)}{v}$ 对于正的 v 单調增加，因此函数 $\Phi(v)$ 单調增加. 因而只須对于正的 v_1 及 v_2 来証明不等式(6.18).

显然

$$\left[\frac{\Phi_1(v_1)}{v_1}-\frac{\Phi_1(v_2)}{v_2}\right]\left[\frac{\Phi_2(v_1)}{v_1}-\frac{\Phi_2(v_2)}{v_2}\right]\geqslant 0,$$

因为两个因子具有相同的符号. 于是得

$$\frac{[\Phi_1(v_1)+\Phi_1(v_2)][\Phi_2(v_1)+\Phi_2(v_2)]}{v_1+v_2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\Phi_1(v_1)\Phi_2(v_1)}{v_1}+\frac{\Phi_1(v_2)\Phi_2(v_2)}{v_2},$$

又由于 $\Phi_1(v)$ 及 $\Phi_2(v)$ 是凸函数，故得

$$\Phi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)=\frac{2}{v_1+v_2}\Phi_1\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\Phi_2\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2(v_1+v_2)}[\Phi_1(v_1)+\Phi_1(v_2)][\Phi_2(v_1)+\Phi_2(v_2)] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{\Phi_1(v_1)\Phi_2(v_1)}{v_1}+\frac{\Phi_1(v_2)\Phi_2(v_2)}{v_2}\right],$$

从而推出(6.18).

引理証毕.

定理 6.9. 假設 N-函数 $M_1(u)$ 及 $M_2(u)$ 满足 Δ_3-条件,并且 $M_1(u) \prec M_2(u)$, 則

$$N_1[N_2(v)] \sim \Phi(v) = \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}.$$

証. 我們首先指出, 关系式 $\frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|} \prec N_1[N_2(v)]$ 对于任意 N-函数 $N_1(v)$ 及 $N_2(v)$ 都正确. 事实上, 由(1.16)不等式

$$\frac{N_1(v)}{v} < \frac{N_1[N_2(v)]}{N_2(v)}$$

当 $N_2(v) > v$ 时成立. 由此得出, 对 v 的这些值

$$\frac{N_1(v)N_2(v)}{v} < N_1[N_2(v)].$$

現在我們来証明,在定理的条件下 $N_1[N_2(v)] \prec \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}$.

关系式 $M_1(u) \prec M_2(u)$ 表明当自变量的值較大时

$$M_1(u) \leqslant M_2(k_1u),$$

其中 k_1 是某个数,可以認为它是大于 1 的. 因此对于自变量較大的值

$$M_2^{-1}(v) \leqslant k_1M_1^{-1}(v).$$

于是

$$vM_2^{-1}(v) \leqslant k_1M_1^{-1}(v)M_1[M_1^{-1}(v)].$$

N-函数 $M_1(u)$ 满足 Δ_3-条件,因此有这样的 $k_2 > 1$,使当自变量的值較大时

$$uM_1(u) \leqslant M_1(k_2u).$$

于是从上面的不等式得出,对于自变量較大的值

$$vM_2^{-1}(v) \leqslant k_1M_1[k_2M_1^{-1}(v)] \leqslant M_1[k_1k_2M_1^{-1}(v)]. \qquad (6.19)$$

因而

$$M_1^{-1}[vM_2^{-1}(v)] \leqslant k_1k_2M_1^{-1}(v)$$

和

$$vM_2^{-1}(v)M_1^{-1}[vM_2^{-1}(v)] \leqslant k_1k_2\frac{vM_1^{-1}(v)vM_2^{-1}(v)}{v}. \quad (6.20)$$

由于定理 6.1，有这样的常数 $k_3 < 1$ 及 $k_4 > 1$，使当自变量的值較大时

$$N_1(k_3v) \leqslant vM_1^{-1}(v) \leqslant N_1(k_4v),$$
$$N_2(k_3v) \leqslant vM_2^{-1}(v) \leqslant N_2(k_4v).$$

从这些不等式和(6.20)可推出，对于較大的自变量的值

$$N_1[k_3N_2(k_3v)] \leqslant k_1k_2\frac{N_1(k_4v)N_2(k_4v)}{v} = k_1k_2k_4\Phi(k_4v).$$

于是

$$N_1[N_2(k_3^2v)] \leqslant \Phi(k_1k_2k_4^2v).$$

这样一来，$N_1[N_2(v)] \prec \Phi(v)$.

定理証毕.

定理 6.10. 假設 $M_1(u)$ 滿足 Δ^2–条件，而 $M_2(u)$ 滿足 Δ_3–条件，則定理 6.9 的結論：

$$N_1[N_2(v)] \sim \Phi(v) = \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}$$

成立.

証. 因为对于較大的自变量的值 $M_2(u) > u$，所以对于較大的 v

$$vM_2^{-1}(v) < v^2 = M_1^2[M_1^{-1}(v)].$$

N–函数 $M_1(u)$ 滿足 Δ^2–条件，这表明存在 $k_1 > 1$，使当自变量的值較大时 $M_1^2(u) \leqslant M_1(k_1u)$. 因此对于 v 較大的值

$$vM_2^{-1}(v) \leqslant M_1[k_1M_1^{-1}(v)].$$

此不等式与不等式 (6.19) 相同. 如同証明前一定理时一样，由它即可推出 $N_1[N_2(v)] \prec \Phi(v)$. 又上面已經指出，关系式 $\Phi(v) \prec N_1[N_2(v)]$ 总是正确的.

定理証毕.

由此定理可得

定理 6.11. 假設 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 满足 Δ^2-条件，則

$$N_1[N_2(v)] \sim N_2[N_1(v)] \sim \Phi(v) = \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}.$$

我們还不知道，定理 6.11 是否只須满足較弱的 Δ_3-条件就够了.

作为例子，我們来研究这样的 N-函数 $N_1(v)$ 及 $N_2(v)$:

$$\text{гл. ч. } N_1(v) = v \ln v \text{ , гл. ч. } N_2(v) = ve^{\sqrt{\ln v}}.$$

函数 $M_1(u)$ 满足 Δ^2-条件，而函数 $M_2(u)$ 满足 Δ_3-条件，但不满足 Δ^2-条件. 此时 $M_2(u) \prec M_1(u)$，因为 $N_1(v) \prec N_2(v)$. 由定理 6.9

$$N_2[N_1(v)] \sim \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|},$$

而由定理 6.10

$$N_1[N_2(v)] \sim \frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}.$$

这样一来，在此例子中定理 6.11 的条件虽然不满足，但它的結論却是正确的.

下面的結論自然地补充了定理 6.11:

定理 6.12. 假設 N-函数 $M_1(u)$ 及 $M_2(u)$ 满足 Δ^2-条件，则 N-函数 $N_1[N_2(v)]$ 及 $N_2[N_1(v)]$ 的余 N-函数也满足 Δ^2-条件.

証. 由于定理 6.11，只須考察 N-函数 $\Phi(v) = \dfrac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}$ 的余 N-函数 $\Psi(u)$.

由定理 6.8，对于自变量較大的值

$$\frac{N_1(v)}{v} < k_1 \frac{N_1(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}, \quad \frac{N_2(v)}{v} < k_2 \frac{N_2(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}.$$

因此

$$\frac{\Phi(v)}{v} = \frac{N_1(v)}{v} \frac{N_2(v)}{v} < k_1 k_2 \frac{N_1(\sqrt{v})N_2(\sqrt{v})}{\sqrt{v}\sqrt{v}} =$$

$$= k_1 k_2 \frac{\Phi(\sqrt{v})}{\sqrt{v}},$$

于是再由定理 6.8 即可推出 $\Psi(u)$ 满足 Δ^2–条件.

定理証毕.

§7. 关于一类 N–函数

1. 問題的提出. 在前一节中，我們已經給出某 N–函数的等价余 N–函数的公式. 当时我們仅能研究这样的 N–函数，或者增加速度快于任意幂函数，或者增加速度慢于任何形如 $u^{1+\varepsilon}(\varepsilon > 0)$ 的幂函数. 这样的 N–函数并不能包括如下的函数 $M(u)$:

$$M(u) = \frac{u^\alpha}{\alpha}(\ln u)^{\gamma_1}(\ln\ln u)^{\gamma_2}\cdots(\ln\ln\cdots\ln u)^{\gamma_n}, \quad (7.1)$$

其中 $\alpha > 1$, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 是任意数.

本节研究特殊类的 N–函数，它包含主部形如(7.1)的函数，并且要給出該类函数的等价余 N–函数的有效的表达式.

为了叙述的簡单起見，我們假定本节中所考虑的一切 N–函数对自变量較大的值有通常的(而非右的)导数.

2. 类 $\mathfrak{M}$. 下面以 $\kappa_R(u)$ 表示函数

$$\kappa_R(u) = \frac{ur(u)}{R(u)}, \quad (7.2)$$

其中 $R(u)$ 是某一可微函数，而 $r(u)$ 是它的导数. 显然，函数 $\kappa_R(u)$ 定义在这样的 u 值上，它使得 $r(u)$ 存在并且 $R(u) \neq 0$.

函数 $\kappa_R(u)$ 有下列明显的簡单性质:

$$\kappa_{R_1 \cdot R_2}(u) = \kappa_{R_1}(u) + \kappa_{R_2}(u), \quad (7.3)$$

$$\kappa_{R_1[R_2]}(u) = \kappa_{R_1}[R_2(u)] \cdot \kappa_{R_2}(u). \quad (7.4)$$

这两个公式对这样的 u 值成立，它使得表达式的右端有意义.

注意，对任何可微的 N–函数 $M(u)$

$$\kappa_M(u) > 1. \quad (7.5)$$

事实上，因为 $p(u) = M'(u)$ 漸升，所以

$$up(u) > M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt,$$

因而推出(7.5).

以 $\mathfrak{M}$ 表示这样的函数 $R(u)$ 的类，它使得 $\kappa_R(u)$ 对一切較大的 u 有定义并且

$$\lim_{u\to\infty} \kappa_R(u) = 0. \tag{7.6}$$

由(7.3)可知，类 $\mathfrak{M}$ 包含每一对函数 $R_1(u)$ 和 $R_2(u)$ 的同时，也包含它的乘积 $R_1(u)R_2(u)$. 从同一性質(7.3)可推出

$$\kappa_{\frac{1}{R}}(u) = -\kappa_R(u),$$

因而又可推出类 $\mathfrak{M}$ 包含每一个函数 $R(u)$ 的同时，也包含函数 $\dfrac{1}{R(u)}$.

由(7.4)可知，复合函数 $R_1[R_2(u)]$ 属于 $\mathfrak{M}$，假如 $R_2(u)\in\mathfrak{M}$，$\lim\limits_{u\to\infty} R_2(u) = \infty$，而 $\overline{\lim\limits_{u\to\infty}} \kappa_{R_1}(u) < \infty$.

从所叙述的类 $\mathfrak{M}$ 的性質可推出函数

$$(\ln u)^{\gamma_1},\ (\ln\ln u)^{\gamma_2},\ \cdots,\ (\ln\ln\cdots\ln u)^{\gamma_n}$$

(γ_i 是任意数)属于該类.

給定 $\varepsilon > 0$，則对函数 $R(u)\in\mathfrak{M}$ 可找到这样的 u_0 使得

$$\left|\frac{ur(u)}{R(u)}\right| < \varepsilon \quad (u \geqslant u_0),$$

因而

$$\frac{r(u)}{R(u)} < \frac{\varepsilon}{u} \quad (u \geqslant u_0).$$

从 u_0 到 u 积分上述不等式，得到

$$\ln\left|\frac{R(u)}{R(u_0)}\right| < \varepsilon \ln\frac{u}{u_0},$$

从而

$$|R(u)| < |R(u_0)|\left(\frac{u}{u_0}\right)^{\varepsilon} \quad (u \geqslant u_0). \tag{7.7}$$

从(7.7)又可推出对今后有用的关系式

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u}{|R(u)|} = \infty. \tag{7.8}$$

引理 7.1. 設函数 $R(u)\in\mathfrak{M}$ 对較大的值 u 是正的，則对任

何 $\varepsilon > 0$ 函数 $u^{\varepsilon}R(u)$ 漸升于无穷.

証. 我們只須証函数 $h(u) = u^{\frac{\varepsilon}{2}}R(u)$ 对較大的 u 值有正的导数. 这从(7.6)可推出,因为

$$h'(u) = \frac{\varepsilon}{2}u^{\frac{\varepsilon}{2}-1}R(u) + u^{\frac{\varepsilon}{2}}r(u) = u^{\frac{\varepsilon}{2}-1}R(u)\left[\frac{\varepsilon}{2} + \kappa_R(u)\right].$$

引理証毕.

引理 7.2. 設 $R(u)$ 是 $\mathfrak{M}$ 中这样的函数,它使得

$$\frac{u^{\alpha}}{\alpha}R(u),\ \frac{v^{\beta}}{\beta R^{\beta-1}(v)} \quad \left(\alpha, \beta > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right)$$

分别是 N-函数 $M(u)$ 和 $N_1(v)$ 的主部. 又設满足条件

$$\lim_{v\to\infty}\frac{R\left[\dfrac{v^{\beta-1}}{R^{\beta-1}(v)}\right]}{R(v)} = b > 0, \tag{7.9}$$

則 N-函数 $N_1(v)$ 等价于 N-函数 $M(u)$ 的余 N-函数 $N(v)$.

証. 考虑函数

$$p_2(u) = u^{\alpha-1}R(u), \quad q_3(v) = \left[\frac{v}{R(v)}\right]^{\beta-1}.$$

由引理 7.1, 这些函数对較大的值 u, v 漸升于无穷. 所以其中的每一个均可看成某一 N-函数 $M_2(u)$ 和 $N_3(v)$ 导数的主部.

直接計算之可知,对較大的 u

$$\frac{p(u)}{p_2(u)} = 1 + \frac{1}{\alpha}\kappa_R(u),\ \frac{q_1(v)}{q_3(v)} = 1 - \frac{\beta-1}{\beta}\kappa_R(u),$$

其中 $p(u) = M'(u)$, $q_1(v) = N_1'(v)$. 从上述不等式和(7.6)可推出

$$\lim_{u\to\infty}\frac{p(u)}{p_2(u)} = \lim_{v\to\infty}\frac{q_1(v)}{q_3(v)} = 1.$$

于是由引理 3.2

$$M(u) \sim M_2(u),\ N_1(v) \sim N_3(v). \tag{7.10}$$

因为

$$p_2[q_3(v)] = \frac{vR\left\{\left[\dfrac{v}{R(v)}\right]^{\beta-1}\right\}}{R(v)},$$

所以由(7.9)

$$\lim_{v\to\infty}\frac{p_2[q_3(v)]}{v}=b>0,$$

因此从定理 3.4 和 3.2 可推出

$$M_2(u)\sim M_3(u),\ N_2(v)\sim N_3(v), \tag{7.11}$$

其中 $M_3(u)$ 和 $N_2(v)$ 分别是 $N_3(v)$ 和 $M_2(u)$ 的余 N-函数.

从(7.10)和(7.11)可推出 $M(u)\sim M_3(u)$. 换言之, $N(v)\sim N_3(v)$. 再由(7.10)

$$N(v)\sim N_1(v).$$

引理証毕.

3. 类 $\mathfrak{N}$. 以 $\mathfrak{N}$ 表示这样的函数 $f(u)$ 的类, 它对自变量較大的值連續、非負并且滿足条件

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f[u+\delta(u)]}{f(u)}=\text{const}>0 \tag{7.12}$$

当

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\delta(u)}{u}=d>-1. \tag{7.13}$$

函数 $|u|^\gamma$ 对任何 γ, $\ln|u|$ 等等均可作为类 $\mathfrak{N}$ 中的函数的例子. 对于其中的第一个

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f[u+\delta(u)]}{f(u)}=\lim_{u\to\infty}\left[1+\frac{\delta(u)}{u}\right]^\gamma=(1+d)^\gamma>0,$$

对于第二个

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f[u+\delta(u)]}{f(u)}=\lim_{u\to\infty}\left\{1+\frac{\ln\left[1+\frac{\delta(u)}{u}\right]}{\ln u}\right\}=1.$$

与每一个函数 $f(u)$ 包含在类 $\mathfrak{N}$ 中的同时它也包含函数 $\frac{1}{f(u)}$.

与每一对函数 $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 包含在类 $\mathfrak{N}$ 中的同时它也包含乘积 $f_1(u)f_2(u)$; 假如 $\lim_{u\to\infty}f_2(u)=\infty$, 那末与函数 $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 包含在类 $\mathfrak{N}$ 中的同时它也包含复合函数 $f_1[f_2(u)]$.

我們只須証最后的結論. 設函数 $\delta(u)$ 滿足条件(7.13)和

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f_2[u+\delta(u)]}{f_2(u)}=\gamma>0,$$

則由等式

$$\delta_1[f_2(u)]=f_2[u+\delta(u)]-f_2(u)$$

所定义的函数 $\delta_1(v)$ 满足条件

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\delta_1(v)}{v}=\lim_{u\to\infty}\frac{\delta_1[f_2(u)]}{f_2(u)}=\gamma-1>-1,$$

因而

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f_1\{f_2[u+\delta(u)]\}}{f_1[f_2(u)]}=\lim_{u\to\infty}\frac{f_1\{f_2(u)+\delta_1[f_2(u)]\}}{f_1[f_2(u)]}=$$

$$=\lim_{v\to\infty}\frac{f_1[v+\delta_1(v)]}{f_1(v)}=\text{const}>0.$$

換言之，$f_1[f_2(u)]\in\mathfrak{N}$.

从所叙述的类 $\mathfrak{N}$ 的性質可推出函数

$$f(u)=u^{\gamma_1}(\ln u)^{\gamma_2}(\ln\ln u)^{\gamma_3}\cdots(\ln\ln\cdots\ln u)^{\gamma_n} \tag{7.14}$$

的主部属于該类．在上述公式中 γ_i 是任意数.

引理 7.3. 类 $\mathfrak{N}$ 中对較大的 u 值单調的函数 $f(u)$ 具有性質

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\ln f(u)}{u}=0. \tag{7.15}$$

証． 首先让我們来研究函数 $f(u)$ 漸升的情形．从(7.12)，假如在此条件中命 $\delta(u)=u$，可推出当 u 大于某一 $u_0>0$ 时

$$f(2u)\leqslant kf(u),$$

其中 k 是某一正数．設 $2^nu_0<u\leqslant 2^{n+1}u_0$，則

$$f(u)\leqslant f(2^{n+1}u_0)\leqslant k^{n+1}f(u_0)\leqslant kf(u_0)2^{n\ln_2 k}\leqslant kf(u_0)\left(\frac{u}{u_0}\right)^{\ln_2 k}.$$

从而

$$\ln f(u)\leqslant\ln[kf(u_0)u_0^{-\ln_2 k}]+\ln_2 k\cdot\ln u,$$

因而推出(7.15).

今設函数 $f(u)$ 下降，則函数 $f_1(u)=\dfrac{1}{f(u)}$ 漸升且仍属于类 $\mathfrak{N}$．从对漸升函数已証的結論可推出

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\ln f(u)}{u} = -\lim_{u\to\infty}\frac{\ln f_1(u)}{u} = 0.$$

引理証毕.

注意,我們不难驗証函数(7.14)对較大的 u 值单調.

引理 7.4. 設函数 $R(u)\in\mathfrak{M}$ 且可表成 $R(u)=f(\ln u)$,其中 $f(u)\in\mathfrak{N}$ 单調,則对 $\alpha>1$

$$\lim_{v\to\infty}\frac{R\left\{\left[\frac{v}{R(v)}\right]^{\alpha-1}\right\}}{R(v)} = \text{const} > 0.$$

証. 設 $\delta(u)=(\alpha-2)u-(\alpha-1)\ln f(u)$, 則由前面的引理

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\delta(u)}{u}=\alpha-2>-1.$$

又因

$$\frac{R\left\{\left[\frac{v}{R(v)}\right]^{\alpha-1}\right\}}{R(v)} = \frac{f[(\alpha-1)\ln v-(\alpha-1)\ln R(v)]}{f(\ln v)} = \frac{f[\ln v+\delta(\ln v)]}{f(\ln v)},$$

故

$$\lim_{v\to\infty}\frac{R\left\{\left[\frac{v}{R(v)}\right]^{\alpha-1}\right\}}{R(v)} = \lim_{u\to\infty}\frac{f[u+\delta(u)]}{f(u)} = \text{const} > 0.$$

引理証毕.

4. 余函数定理.

定理 7.1. 設函数 $R(u)\in\mathfrak{M}$ 且可表成 $R(u)=f(\ln u)$,其中 $f(u)\in\mathfrak{N}$ 单調. 又設有 N-函数 $M(u)$ 使得

$$\text{гл. ч. } M(u)=\frac{u^{\alpha}}{\alpha}R(u)\quad(\alpha>1).$$

最后設函数 $\frac{v^{\beta}}{\beta}R^{1-\beta}(v)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\right)$ 是某一 N-函数 $N_1(v)$ 的主部,則

$$N(v) \sim N_1(v). \tag{7.16}$$

証. 从引理 7.4 可推出条件(7.9)满足，再从引理 7.2 即可推出(7.16).

定理証毕.

让我們回过来研究本节开头所提出的 N-函数 $M(u)$:

$$M(u) = \frac{u^\alpha}{\alpha}(\ln u)^{\gamma_1}(\ln\ln u)^{\gamma_2}\cdots(\ln\ln\cdots\ln u)^{\gamma_n} \tag{7.1}$$

($\alpha > 1$, γ_i 是任意数). 該函数可表成

$$M(u) = \frac{u^\alpha}{\alpha} f(\ln u),$$

其中 $f(u)$ 由公式(7.14)所确定. 由此可見，函数 $M(u)$ 满足定理 7.1 的条件. 命

$$N_1(v) = \frac{v^\beta}{\beta}[(\ln v)^{-\gamma_1}(\ln\ln v)^{-\gamma_2}\cdots(\ln\ln\cdots\ln v)^{-\gamma_n}]^{\beta-1}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right). \tag{7.17}$$

从定理 7.1 可推出

定理 7.2. *主部为 (7.17) 的 N-函数 $N_1(v)$ 等价于主部为 (7.1) 的 N-函数 $M(u)$ 的余 N-函数.*

第二章　奥尔里奇空間

§8. 奥尔里奇类

1. 定义. 本书中以G表示有限維欧氏空間的有界閉集,并且考虑通常的勒貝格測度. 但今后所导出的大部分結論和体系对具有有限的連續測度（連續測度我們理解为对每一个集合存在測度等于其半的子集）的抽象集合仍然有效.

設 $M(u)$ 为某一 N-函数, 我們以 $L_M(G)$ 表示定义在G上且滿足

$$\rho(u; M) = \int_G M[u(x)]dx < \infty$$

的一切实値函数 $u(x)$ 的类. 此时仅在測度为 0 的集合上互异的函数我們不認为它們是不同的. 記号 $\rho(u; M)$ 以后經常用到.

类 $L_M(G)$ 称为奥尔里奇类. 如果不会引起誤解的話,我們将用 L_M 来代替 $L_M(G)$.

所有有界函数, 但并非所有可求和函数属于类 L_M. 不难看出,类 L_M 中的每一个函数是可求和的.

注意每一个在 G 上可求和的函数 $u(x)$ 必属于某一奥尔里奇类. 为了証明这个結論,我們来考虑集合 $G_n = G\{n-1 \leqslant |u(x)| < n\}$. 显然

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{mes} G_n \leqslant \int_G |u(x)|dx + \operatorname{mes} G < \infty.$$

大家知道,由此还可以造出无界漸升的数列 α_n,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \operatorname{mes} G_n < \infty. \tag{8.1}$$

令

$$p(t)=\begin{cases}t, & \text{当 } 0\leqslant t<1 \text{ 时}\\ \alpha_n, & \text{当 } n\leqslant t<n+1(n=1,2,\cdots) \text{ 时},\end{cases}$$

则函数 $p(t)$ 具有使

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt$$

成为 N-函数所必須的一切性質. 因为

$$M(n)=\int_0^n p(t)dt\leqslant\alpha_n n,$$

所以由(8.1)得到

$$\int_G M[u(x)]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}M[u(x)]dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}M(n)\operatorname{mes}G_n\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n n\operatorname{mes}G_n<\infty.$$

这說明 $u(x)\in L_M$.

上面所証明的結論表明, G 上可求和函数的空間 L 是所有奥尔里奇类的幷集.

今后还会用到下列更強的結論, 亦即对每一个可求和函数 $u(x)$, 可找到滿足 Δ'-条件的 N-函数 $Q(u)$, 使得

$$\int_G Q\{Q[u(x)]\}dx<\infty.$$

我們已經証明存在 N-函数 $M(u)$ 使得

$$\int_G M[u(x)]dx<\infty.$$

而函数 $M(u)$ 又可以表成复合函数的形式 $M(u)=Q_1[Q_2(u)]$. 今考慮 N-函数 $P(v)=e^{P_1(v)+P_2(v)}-1$, 其中 $P_1(v)$ 和 $P_2(v)$ 是 $Q_1(u)$ 和 $Q_2(u)$ 的余 N-函数. 因函数 $P(v)$ 滿足 Δ^2-条件并且对較大的 v 有 $P_1(v)<P(v)$, $P_2(v)<P(v)$, 故由定理 6.6, $P(v)$ 的余 N-函数 $Q(u)$ 滿足 Δ'-条件. 又由定理 2.1, 对自变量較大的值有 $Q(u)<Q_1(u)$, $Q(u)<Q_2(u)$, 因此

$$\int_G Q\{Q[u(x)]\}dx<a+\int_G Q_1\{Q_2[u(x)]\}dx<\infty.$$

2. 琴生积分不等式. 設 $u(x) \in L_M$, 則有不等式

$$M\left\{\frac{\int_G u(x)dx}{\text{mes } G}\right\} \leqslant \frac{\int_G M[u(x)]dx}{\text{mes } G}, \tag{8.2}$$

我們称之为琴生积分不等式. 注意琴生不等式通常指的是更一般的关系式(譬如参看 [12],73 頁).

首先討論連續函数 $u(x)$ 的情形. 任給 $\varepsilon > 0$, 将集合 G 分成 n 个子集 G_i, 使得 $\text{mes } G_i = \frac{\text{mes } G}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 并且

$$\left|M\left(\int_G \frac{u(x)}{\text{mes } G} dx\right) - M\left(\sum_{i=1}^n u(x_i)\frac{1}{n}\right)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{\int_G M[u(x)]dx}{\text{mes } G} - \sum_{i=1}^n \frac{M[u(x_i)]}{n}\right| < \varepsilon,$$

其中 x_i 是集合 G_i 的某一点. 从上述不等式和(1.3)即可推出

$$M\left(\frac{\int_G u(x)dx}{\text{mes } G}\right) \leqslant M\left(\sum_{i=1}^n u(x_i)\frac{1}{n}\right) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum_{i=1}^n M[u(x_i)]}{n} + \varepsilon \leqslant \frac{\int_G M[u(x)]dx}{\text{mes } G} + 2\varepsilon,$$

再由 ε 的任意性便知,不等式(8.2)成立.

对 L_M 中的任意函数的情形,不等式 (8.2) 由該不等式对連續函数的情形取极限即得.

3. 类的比較. 由不同的 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 所定义的奥尔里奇类 L_{M_1} 和 L_{M_2}, 一般說来也是不同的.

定理 8.1. 包含关系

$$L_{M_1} \subset L_{M_2} \tag{8.3}$$

成立的充要条件为存在正常数 u_0 和 a,使得

$$M_2(u) \leqslant aM_1(u) \quad (u \geqslant u_0). \tag{8.4}$$

証. 条件 (8.4) 的充分性是明显的: 对任何函数 $u(x) \in L_{M_1}$

恆有

$$\rho(u;\ M_2) = \int_G M_2[u(x)]dx \leqslant$$
$$\leqslant M_2(u_0)\ \text{mes}\ G + a\int_G M_1[u(x)]dx < \infty.$$

假定条件(8.4)不滿足，则可找到无界漸升的数列 u_n，使得

$$M_2(u_n) > 2^n M_1(u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{8.5}$$

将集合 G 分成互不相交的子集 G_n，使得

$$\text{mes}\ G_n = \frac{M_1(u_1)\,\text{mes}\ G}{2^n M_1(u_n)} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

幷且命

$$u(x) = \begin{cases} u_n & \text{当 } x \in G_n \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x \overline{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \text{ 时}. \end{cases}$$

函数 $u(x) \in L_{M_1}$，因为

$$\int_G M_1[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n} M_1[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(u_n)\text{mes}\ G_n =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_1(u_1)\text{mes}\ G}{2^n} < \infty,$$

但函数 $u(x) \overline{\in} L_{M_2}$，因为由(8.5)得到

$$\int_G M_2[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n} M_2[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} M_2(u_n)\text{mes}\ G_n \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} M_1(u_1)\ \text{mes}\ G = \infty.$$

定理証毕.

从这个定理可推出，两个函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 确定同一奥尔里奇类的充要条件为存在正常数 a, b 和 u_0 使得

$$aM_2(u) \leqslant M_1(u) \leqslant bM_2(u) \quad (u \geqslant u_0). \tag{8.6}$$

4. 奥尔里奇类的构造. 由琴生不等式(1.2)可推出奥尔里奇类 L_M 是凸集；对类 L_M 中的任意两个函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$，整个綫

段 $u_\alpha(x) = \alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x)\,(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 也包含在 L_M 内. 事实上,若 $u_1(x), u_2(x) \in L_M$, 則

$$\rho(u_\alpha; M) = \int_G M[\alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x)]dx \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\rho(u_1; M) + (1-\alpha)\rho(u_2; M) < \infty.$$

定理 8.2. 类 L_M 是綫性集的充要条件为 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件.

証. 設 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件, 則对任何 l, 存在常数 $k(l)$ 和 u_0 使得

$$M(lu) \leqslant k(l)M(u) \quad (u \geqslant u_0).$$

根据定理 8.1, 由上述的不等式可推出对类 L_M 中的每一个函数 $u(x)$, 函数 $lu(x)$ 也属于 L_M.

設 $u_1(x), u_2(x) \in L_M$,則由已証的結果和不等式(1.1)可知,对任何 α, β 有

$$\int_G M[\alpha u_1(x) + \beta u_2(x)]dx \leqslant \frac{1}{2}\int_G M[2\alpha u_1(x)]dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_G M[2\beta u_2(x)]dx < \infty.$$

定理条件的充分性已經証明.

現在假定 L_M 是綫性集, 特别, 这表明 $2u(x)$ 与 $u(x)$ 同时属于 L_M, 亦即有 $L_M \subset L_{M_1}$, 其中 $M_1(u)$ 表示 N-函数 $M(2u)$. 根据定理 8.1,由上述包含关系可推出存在常数 a 和 u_0 使得

$$M_1(u) = M(2u) \leqslant aM(u) \quad (u \geqslant u_0).$$

定理証毕.

讓我們詳尽地研究 N-函数 $M(u)$ 不满足 Δ_2-条件的情形. 設 $u(x) \in L_M$, 我們称所有函数 $u_\beta(x) = \beta u(x)\,(0 \leqslant \beta < \infty)$ 的集合为通过 $u(x)$ 的射綫. 若函数 $u(x)$ 有界, 則易見整个射綫 $u_\beta(x)$ 属于 L_M. 根据定理 8.2, 存在这样的函数, 它的射綫的一部分属于 L_M,但整个射綫并不属于这个类. 以 β_0 表示这样的数,它使得 $\beta u(x) \in L_M$ 当 $\beta < \beta_0$ 时,并且当 $\beta > \beta_0$ 时 $\beta u(x) \overline{\in} L_M$. 現在自然要提出如下的問題: 函数 $\beta_0 u(x)$ 是否属于类 L_M. 我們証明这两

种情况都是可能出現的.

設 N-函数 $M(u)$ 不満足 Δ_2-条件，則可找到趋于无穷的漸升数列 $u_n(n=1,2,\cdots)$，使得 $M(u_1)>1$ 并且

$$M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]>2^nM(u_n)\quad(n=1,2,\cdots).\qquad(8.7)$$

設 G_n 是 G 的互不相交的子集，它使得

$$\text{mes } G_n=\frac{\text{mes } G}{2^nM(u_n)}\quad(n=1,2,\cdots).\qquad(8.8)$$

定义函数 $u_*(x)$ 如下：

$$u_*(x)=\begin{cases}u_n, & 若\ x\in G_n\quad(n=1,2,\cdots)\\ 0, & 若\ x\bar{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n.\end{cases}$$

函数 $u_*(x)$ 属于 L_M，因为

$$\rho(u_*;M)=\int_G M[u_*(x)]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}M[u_*(x)]dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}M(u_n)\text{mes } G_n<\infty.$$

由于(1.17)，所以函数 $\beta u_*(x)$ 当 $\beta<1$ 时也属于 L_M. 今証 $\beta u_*(x)$ 当 $\beta>1$ 时不属于 L_M. 事实上，当 $1+\frac{1}{n}<\beta$ 时由(8.7)和(8.8)可得到

$$\int_{G_n}M[\beta u_*(x)]dx=M(\beta u_n)\text{mes } G_n>$$

$$>M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]\text{mes } G_n>\text{mes } G,$$

因而

$$\rho(\beta u_*;M)=\int_G M[\beta u_*(x)]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}M[\beta u_*(x)]dx\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{1+\frac{1}{n}<\beta}\int_{G_n}M[\beta u_*(x)]dx=\infty.$$

現在我們来作出函数 $u^*(x)$ 使得 $\beta u^*(x)\in L_M$ 当 $\beta<1$ 时，

而当 $\beta \geqslant 1$ 时 $\beta u^*(x) \overline{\in} L_M$. 为此,命

$$u^*(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n, & 若 x \in G_n \quad (n=1,2,\cdots) \\ 0, & 若 x \overline{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases}$$

由于(8.7)和(8.8),所以当 $\beta \geqslant 1$ 时有

$$\rho(\beta u^*; M) = \int_G M[\beta u^*(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[\beta u^*(x)]dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right] \text{mes } G_n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^n M(u_n) \text{mes } G_n = \infty.$$

若 $\beta < 1$, 则当 $\beta\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$ 时有

$$\int_{G_n} M[\beta u^*(x)]dx = M\left[\beta\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right] \text{mes } G_n \leqslant \frac{\text{mes } G}{2^n},$$

因而

$$\rho(\beta u^*; M) = \int_G M[\beta u^*(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[\beta u^*(x)]dx < \infty.$$

§9. 空間 L_M^*

1. 奥尔里奇范数. 設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数,我們以 $L_M^*(G)$ 表示所有使得

$$(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx < \infty$$

对一切 $v(x) \in L_N$ 成立的函数 $u(x)$ 的集合. 如同定义奥尔里奇类的情形一样, 在这里我們不認为仅在測度为 0 的集合上相异的函数是不同的. 如果不会引起誤解,我們将用 L_M^* 代替 $L_M^*(G)$.

从定义即可推出 L_M^* 是綫性集.

由楊格不等式可知,对每一对函数 $u(x) \in L_M$, $v(x) \in L_N$ 有

$$(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx \leqslant \rho(u; M) + \rho(v; N), \quad (9.1)$$

因而推出 $L_M \subset L_M^*$.

定理 9.1. 設 $u(x) \in L_M^*$,則

$$\sup_{\rho(v;\, N)\leqslant 1} |(u,\, v)| = \sup_{\rho(v;\, N)\leqslant 1} \left| \int_G u(x)v(x)dx \right| < \infty.$$

証. 假定定理的結論不成立,則可找到函数 $u_0(x) \in L_M^*$ 和函数列 $v_n(x) \in L_N$, $\rho(v_n;\, N) \leqslant 1$ 使得

$$\int_G u_0(x)v_n(x)dx > 2^n \quad (n = 1,\, 2,\, \cdots). \tag{9.2}$$

不失普遍性,可以認为所有这些函数都是正的.

考虑漸升的函数列

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} v_k(x) \quad (n = 1,\, 2,\, \cdots).$$

容易看出,由 N-函数 $N(v)$ 的凸性可得

$$\rho(g_n;\, N) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \rho(v_k;\, N) < 1,$$

又由(9.2)可得

$$\int_G u_0(x)g_n(x)dx \geqslant n \quad (n = 1,\, 2,\, \cdots). \tag{9.3}$$

显然漸升的函数列 $g_n(x)$ 在 G 上几乎处处收斂于函数

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} v_k(x).$$

因为函数列 $N[g_n(x)]$ 同样是漸升的,所以在不等式

$$\int_G N[g_n(x)]dx < 1$$

中,若命 $n \to \infty$, 則由列文定理[1]得到

$$\int_G N[g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \int_G N[g_n(x)]dx \leqslant 1.$$

由此可見,函数 $g(x) \in L_N$.

因漸升的可求和函数列 $u_0(x)g_n(x)$ $(n = 1,\, 2,\, \cdots)$ 几乎处处

---

1) 列文定理(見[38]). 若漸升的可測函数列 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$ 在 G 上几乎处处收斂于函数 $\varphi(x)$,則

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \varphi_n(x)dx = \int_G \varphi(x)dx.$$

收斂于函数 $u_0(x)g(x)$，故再由列文定理和(9.3)得到

$$\int_G u_0(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_G u_0(x)g_n(x)dx = \infty.$$

这与 $u_0(x) \in L_M^*$ 发生矛盾。

定理証毕。

上面所証明的結論，使我們能够借助于下列等式

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v;\,N)\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \tag{9.4}$$

在集合 L_M^* 中引入**奥尔里奇范数**。

从定义即可推出范数(9.4)滿足通常的公理：

1）$\|u\|_M = 0$ 当且仅当几乎处处有 $u(x) = 0$；

2）$\|\alpha u\|_M = |\alpha|\,\|u\|_M$；

3）$\|u_1 + u_2\|_M \leqslant \|u_1\|_M + \|u_2\|_M$.

这样一来，集合 L_M^* 就成为綫性賦范空間，我們称它为**奥尔里奇空間**。

註我們再指出范数的一个明显的性質：若 $u_1(x), u_2(x) \in L_M^*$，并且在 G 上几乎处处有 $|u_1(x)| \leqslant |u_2(x)|$，則 $\|u_1\|_M \leqslant \|u_2\|_M$.

作为例子，我們来討論由 N-函数 $M(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ $(\alpha > 1)$ 所确定的空間 L_M^*. $M(u)$ 的余 N-函数为 $N(v) = \frac{|v|^\beta}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1\right)$.

首先，設 $u_1(x) \in L_M^*$ 并且

$$\|u_1\|_\alpha = \left(\int_G |u_1(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1, \tag{9.5}$$

則由荷尔德不等式可知，对任何滿足条件 $\rho(v; N) \leqslant 1$ 的函数 $v(x) \in L_N$ 有

$$\left|\int_G u_1(x)v(x)dx\right| \leqslant \left(\int_G |u_1(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_G |v(x)|^\beta dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \beta^{\frac{1}{\beta}},$$

于是

$$\|u_1\|_M = \sup_{\rho(v;\,N)\leqslant 1}\left|\int_G u_1(x)v(x)dx\right| \leqslant \beta^{\frac{1}{\beta}}. \tag{9.6}$$

另一方面，对滿足条件 $\rho(v; N) = 1$的函数

$v_0(x) = \beta^{\frac{1}{\beta}} |u_1(x)|^{\alpha-1} \operatorname{sign} u_1(x)$ 有

$$\int_G u_1(x) v_0(x)\, dx = \beta^{\frac{1}{\beta}} \int_G |u_1(x)|^\alpha dx = \beta^{\frac{1}{\beta}}.$$

因此从(9.6)得到

$$\|u_1\|_M = \beta^{\frac{1}{\beta}}.$$

現在設 $u(x)$ 是 L_M^* 中的任意函数，則因函数 $u_1(x) = \dfrac{u(x)}{\|u\|_\alpha}$ 滿足条件(9.5)，故得

$$\|u\|_M = \beta^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_G |u(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{9.7}$$

由此可見，在空間 L_M^* 中定义的奥尔里奇范数和空間 L^α 的通常范数相差一个常数因子.

2. 完全性.

定理 9.2. 奥尔里奇空間是完全的.

証. 設函数列 $u_n(x) \in L_M^* (n = 1, 2, \cdots)$ 本来收斂，即

$$\lim_{n, m\to\infty} \|u_n - u_m\|_M = 0. \tag{9.8}$$

这說明对任何滿足条件 $\rho(v, N) \leqslant 1$ 的函数 $v(x) \in L_N$ 有

$$\lim_{n, m\to\infty} \int_G |u_n(x) - u_m(x)|\, |v(x)|\, dx = 0.$$

从上式可推出敘列 $u_n(x) (n = 1, 2, \cdots)$ 依測度收斂. 因此可选出子敘列 $u_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \cdots)$，它几乎处处收斂于某一函数 $u_0(x)$.

任給 $\varepsilon > 0$，由(9.8)可找到这样的 $k(\varepsilon)$，使当 $k, k+p > k(\varepsilon)$ 时对一切滿足条件 $\rho(v; N) \leqslant 1$ 的 $v(x) \in L_N$ 有

$$\int_G |u_{n_{k+p}}(x) - u_{n_k}(x)|\, |v(x)|\, dx < \varepsilon.$$

在上述不等式中，若命 $p \to \infty$，則由法都定理[1)]得到

---

1) 法都定理（見[38]）. 若非負可測的函数列 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$ 在 G 上几乎处处收斂于函数 $\varphi(x)$，則

$$\int_G \varphi(x)\, dx \leqslant \sup_n \left\{\int_G \varphi_n(x) dx\right\}.$$

$$\int_G |u_0(x) - u_{n_k}(x)| |v(x)| dx \leqslant \varepsilon$$

对所有满足条件 $\rho(v;N) \leqslant 1$ 的 $v(x) \in L_N$ 成立.

从这个不等式首先可推出$u_0(x)-u_{n_k}(x) \in L_M^*$,因而 $u_0(x) \in L_M^*$;其次又可推出

$$\|u_0 - u_{n_k}\|_M \leqslant \varepsilon,$$

即子叙列 $u_{n_k}(x)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 按范数收斂于 $u_0(x)$. 再因为 $u_{n_k}(x)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 是本来收斂叙列的子叙列,所以整个叙列 $u_n(x)(n=1, 2, \cdots)$ 也就收斂于函数 $u_0(x)$.

定理証毕.

由此可見,奥尔里奇空間是巴拿哈空間.

3. 特征函数的范数. 集合 $\mathscr{E} \subset G$ 的特征函数記做 $\kappa(x; \mathscr{E})$.

設 $v(x)$ 是 L_N 中的函数,它使得 $\rho(v; N) \leqslant 1$,則由琴生积分不等式(8.2)得到

$$N\left(\frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} \int_{\mathscr{E}} v(x) dx\right) \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} \int_{\mathscr{E}} N[v(x)] dx \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}},$$

因而

$$\int_{\mathscr{E}} v(x) dx \leqslant \operatorname{mes} \mathscr{E} N^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}}\right), \tag{9.9}$$

其中 $N^{-1}(u)$ 是 $N(v)$ 的反函数.

又对满足条件 $\rho(v_0; N) = 1$ 的函数 $v_0(x) = N^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}}\right) \times \kappa(x; \mathscr{E})$ 有

$$\int_{\mathscr{E}} v_0(x) dx = \operatorname{mes} \mathscr{E} N^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}}\right). \tag{9.10}$$

根据范数的定义

$$\|\kappa(x; \mathscr{E})\|_M = \sup_{\rho(v;N) \leqslant 1} \left| \int_G \kappa(x; \mathscr{E}) v(x) dx \right| = \sup_{\rho(v;N) \leqslant 1} \left| \int_{\mathscr{E}} v(x) dx \right|.$$

因此,由(9.9)和(9.10)得到特征函数的范数公式

$$\|\kappa(x;\mathscr{E})\|_M = \operatorname{mes}\mathscr{E} N^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes}\mathscr{E}}\right). \tag{9.11}$$

4. 荷尔德不等式. 我們已經指出,类 L_M 包含在空間 L_M^* 內. 由(9.1)又可知,对每一个函数 $u(x)\in L_M$ 有

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} |(u, v)| \leqslant \rho(u; M) + 1. \tag{9.12}$$

引理 9.1. 設 $p(u)$ 是 N-函数 $M(u)$ 的右导数,又設 $u(x)\in L_M^*$ 并且 $\|u\|_M\leqslant 1$,則函数 $v_0(x)=p(|u(x)|)$ 属于 L_N 并且 $\rho(v_0; N)\leqslant 1$.

證. 首先証明对任何函数 $v(x)\in L_N$ 有

$$\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \leqslant \begin{cases}\|u\|_M, & 若\ \rho(v;N)\leqslant 1,\\ \|u\|_M\rho(v;N) & 若\ \rho(v;N)>1.\end{cases} \tag{9.13}$$

不等式 (9.13) 中的第一个是明显的. 为了得到第二个不等式,注意当 $\rho(v;N)>1$ 时从(1.17)可推出

$$N\left[\frac{v(x)}{\rho(v;N)}\right] \leqslant \frac{N[v(x)]}{\rho(v;N)},$$

于是

$$\int_G N\left[\frac{v(x)}{\rho(v;N)}\right]dx \leqslant \frac{1}{\rho(v;N)}\int_G N[v(x)]dx = 1,$$

所以

$$\left|\int_G u(x)\frac{v(x)}{\rho(v;N)}dx\right| \leqslant \|u\|_M,$$

从而推出(9.13)的第二个不等式.

設 $\|u\|_M\leqslant 1$, 命

$$u_n(x) = \begin{cases}u(x), & 若\ |u(x)|\leqslant n,\\ 0, & 若\ |u(x)|>n,\end{cases}$$

則因函数 $u_n(x)$ 有界,故得 $p(|u_n(x)|)\in L_N$.

假定引理的結論不成立,那末一定可找到这样的 n_0,使得

$$\int_G N[p(|u_{n_0}(x)|)]dx > 1.$$

由(2.7)

$$N[p(|u_{n_0}(x)|)] < M[u_{n_0}(x)] + N[p(|u_{n_0}(x)|)] =$$
$$= |u_{n_0}(x)|p(|u_{n_0}(x)|),$$

积分这个不等式并利用(9.13)得到

$$\int_G N[p(|u_{n_0}(x)|)]dx < \int_G |u_{n_0}(x)|p(|u_{n_0}(x)|)dx \leqslant$$

$$\leqslant \|u_{n_0}\|_M \int_G N[p(|u_{n_0}(x)|)]dx.$$

这与不等式 $\|u_{n_0}\|_M \leqslant \|u\|_M \leqslant 1$ 发生矛盾.

引理証毕.

引理 9.2. 設 $\|u\|_M \leqslant 1$,則 $u(x) \in L_M$ 并且

$$\rho(u; M) \leqslant \|u\|_M. \tag{9.14}$$

証. 命 $v_0(x) = p(|u(x)|) \operatorname{sign} u(x)$. 則由引理 9.1 可知 $\rho(v_0; N) \leqslant 1$. 因为从(2.7)得到

$$u(x)v_0(x) = M[u(x)] + N[v_0(x)],$$

所以

$$\int_G M[u(x)]dx \leqslant \int_G M[u(x)]dx + \int_G N[v_0(x)]dx =$$

$$= \int_G u(x)v_0(x)dx \leqslant \|u\|_M.$$

引理証毕.

从上述引理立即得到下列重要的不等式:

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_M}\right] dx \leqslant 1. \tag{9.15}$$

定理 9.3. 对任意一对函数 $u(x) \in L_M^*$, $v(x) \in L_N^*$,不等式

$$\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \leqslant \|u\|_M \|v\|_N \tag{9.16}$$

恒成立.

証. 由(9.15)

$$\rho\left(\frac{v}{\|v\|_N}; N\right) = \int_G N\left[\frac{v(x)}{\|v\|_N}\right] dx \leqslant 1,$$

故

$$\left|\int_G u(x)\frac{v(x)}{\|v\|_N} dx\right| \leqslant \|u\|_M,$$

从而推出(9.16).

定理証毕.

不等式(9.16)称为荷尔德不等式.

5. Δ_2-条件的情形. 从不等式(9.15)可推出,奥尔里奇空間 L_M^* 是类 L_M 的綫性包. 于是由定理 8.2 可知,当 N-函数 $M(u)$ 不满足 Δ_2-条件时,L_M 是 L_M^* 的眞子集.又当 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件时,L_M 与 L_M^* 一致.

6. 平均收斂性. 我們称函数列 $u_n(x) \in L_M^*$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 平均收斂于函数 $u_0(x) \in L_M^*$, 假如

$$\lim_{n\to\infty} \int_G M[u_n(x) - u_0(x)]dx = 0.$$

从不等式(9.14)可推出,每一个按 L_M^* 的范数收斂于某个函数 $u_0(x)$ 的函数列 $u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$,也平均收斂于該函数. 它的逆命題一般說来是不成立的. 事实上,設 N-函数 $M(u)$ 不满足 Δ_2-条件,則存在无界漸升的数列 u_n 使得

$$M(2u_n) > \frac{2^n}{\text{mes } G} M(u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

我們可以認为 $M(u_1) > 1$. 对每一个 n 作出互不相交的集合系 $G_k^{(n)} \subset G(k = 1, 2, \cdots, n)$ 满足

$$\text{mes } G_k^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{\text{mes } G}{2^k M(u_k)} \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

并且命

$$u_n(x) = \begin{cases} u_k, & \text{当 } x \in G_k^{(n)} (k = 1, 2, \cdots, n) \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \,\overline{\in}\, \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k^{(n)} \text{ 时}. \end{cases}$$

因为

$$\int_G M[u_n(x)]dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{G_k^{(n)}} M[u_n(x)]dx = $$
$$= \sum_{k=1}^{n} M(u_k) \text{ mes } G_k^{(n)} < \frac{\text{mes } G}{n},$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_G M[u_n(x)]dx = 0.$$

所以叙列 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 平均收斂于 0.

如果該叙列按范数收斂于 0，則由(9.14)必有不等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_G M[2u_n(x)]dx \leqslant \lim_{n\to\infty}\|2u_n\|_M = 0,$$

可是另一方面，

$$\int_G M[2u_n(x)]dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{G_k^{(n)}} M[2u_n(x)]dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M(2u_k)\mathrm{mes}\, G_k^{(n)} > 1.$$

上面所得到的矛盾表明，叙列 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 不是按范数收斂的.

定理 9.4. 設 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，則按范数收斂等价于平均收斂.

証. 我們只須証明从平均收斂可推出按范数收斂.

設 $u_n(x)\in L_M^* = L_M$ $(n=0,1,\cdots)$ 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_G M[u_n(x)-u_0(x)]dx = 0. \qquad (9.17)$$

任給 $\varepsilon>0$，設 $\frac{1}{2^{k-1}}<\varepsilon$.

因 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，故从(9.17)可推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_G M[2^k(u_n(x)-u_0(x))]dx = 0.$$

設 n_0 是这样的自然数，使当 $n\geqslant n_0$ 时

$$\int_G M[2^k(u_n(x)-u_0(x))]dx < 1,$$

則由(9.12)可知，当 $n\geqslant n_0$ 时

$$\|2^k(u_n-u_0)\|_M \leqslant \rho(2^k(u_n-u_0);M)+1<2,$$

从而推出

$$\|u_n-u_0\|_M < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$

由此可見，叙列 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 按范数收斂于 $u_0(x)$.

定理証毕.

注意，有界函数的集合在平均收斂意义下在类 L_M 中到处稠密，即对每一个函数 $u(x) \in L_M$ 可作出有界函数列 $u_n(x)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_G M[u_n(x)-u(x)]dx=0.$$

譬如，函数 $u_n(x)$ 就可由下列等式确定之：

$$u_n(x)=\begin{cases}u(x), & \text{当 } |u(x)|\leqslant n \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } |u(x)|>n \text{ 时}.\end{cases}$$

从不等式 (9.12) 可推出，任何平均有界的函数集合 $\mathfrak{N}\subset L_M$，即满足条件

$$\int_G M[u(x)]dx\leqslant a \quad (u(x)\in\mathfrak{N}),$$

按范数也有界：

$$\|u\|_M\leqslant b \quad (u(x)\in\mathfrak{N}),$$

其中 $b=b(a)$ 仅与常数 a 有关. 逆命題一般說来并不成立，至少是因为并非所有 L_M^* 中的函数都属于 L_M.

不过，如果 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件，那末下列結論成立：任何按范数有界的集合 $\mathfrak{N}\subset L_M^*=L_M$ 也平均有界. 事实上，設对一切 $u(x)\in\mathfrak{N}$ 有 $\|u\|_M\leqslant a$. 因为 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件，所以存在常数 k 和 u_0 使得

$$M(au)\leqslant kM(u) \quad (u\geqslant u_0).$$

此时对一切 u 有

$$M(au)<M(au_0)+kM(u).$$

从这个不等式和(9.15)可推出

$$\int_G M[u(x)]dx\leqslant M(au_0)\,\mathrm{mes}\,G+k\int_G M\left[\frac{u(x)}{a}\right]dx\leqslant$$
$$\leqslant M(au_0)\,\mathrm{mes}\,G+k=b(a),$$

于是我們的要求获証.

7. 刘克施姆布洛格范数. 集合 L_M^* 可借助与前面所引进的范数不同的范数把它变成巴拿哈空間.

让我們討論这种范数中的一种，它由刘克施姆布洛格[32]詳尽

的研究过. 設

$$\|u\|_{(M)} = \inf k, \tag{9.18}$$

其中 inf 是对滿足

$$\rho\left(\frac{u}{k}; M\right) = \int_G M\left[\frac{u(x)}{k}\right] dx \leqslant 1. \tag{9.19}$$

的一切 $k > 0$ 来取的.

从不等式(9.15)可推出,对每一个函数 $u(x) \in L_M^*$ 不等式

$$\|u\|_{(M)} \leqslant \|u\|_M \tag{9.20}$$

恆成立.

注意,(9.18)中 inf 对滿足 $\|u\|_{(M)} > 0$ 的函数 $u(x)$ 是可以达到的. 这从不等式 (9.19) 对 k 由右边趋于 $\|u\|_{(M)}$ 取极限即可推出(由法都定理),因为此时有

$$\rho\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}; M\right) = \int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right] dx \leqslant 1. \tag{9.21}$$

不难看出,在(9.21)中等号成立,假如 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件. 如果这个条件不具备,那末一定可找到这样的函数 $u(x)$,它滿足 $\rho\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}; M\right) < 1$. 同样不难看出,从等式

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{k_0}\right] dx = 1 \tag{9.22}$$

可推出 $k_0 = \|u\|_{(M)}$.

今証范数 $\|u\|_{(M)}$ 滿足通常的公理.

1. 因为不等式(9.19)对任意 k 成立的充要条件为几乎处处有 $u(x) = 0$, 所以 $\|u\|_{(M)} = 0$ 的充要条件为 $u(x) = 0$ 几乎处处成立.

2. 等式 $\|\alpha u\|_{(M)} = |\alpha| \|u\|_{(M)}$, 从下列明显的关系式即可推出

$$\|\alpha u\|_{(M)} = \inf_{\rho\left(\frac{\alpha u}{k}; M\right) \leqslant 1} k = |\alpha| \inf_{\rho\left(\frac{u}{k}; M\right) \leqslant 1} k = |\alpha| \|u\|_{(M)}.$$

3. 三角不等式

$$\|u_1 + u_2\|_{(M)} \leqslant \|u_1\|_{(M)} + \|u_2\|_{(M)}$$

当函数 $u_1(x), u_2(x)$ 中有一范数为 0 时是显然成立的. 若 $\|u_1\|_{(M)} >$

>0, $\|u_2\|_{(M)}>0$, 則由(1.2)得到

$$M\left[\frac{u_1(x)+u_2(x)}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}\right]\leqslant\frac{\|u_1\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}M\left[\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{(M)}}\right]+$$

$$+\frac{\|u_2\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}M\left[\frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{(M)}}\right],$$

再由(9.21)便知

$$\int_G M\left[\frac{u_1(x)+u_2(x)}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}\right]dx\leqslant 1,$$

因而推出了三角不等式.

作为例子我們来找出集合 $\mathscr{E}\subset G$ 的特征函数的范数 $\|\kappa(x;\ \mathscr{E})\|_{(M)}$. 若 $\operatorname{mes}\mathscr{E}\neq 0$, 則得

$$\|\kappa(x;\mathscr{E})\|_{(M)}=\frac{1}{M^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes}\mathscr{E}}\right)},\tag{9.23}$$

这是因为

$$\int_G M\left[\kappa(x;\ \mathscr{E})M^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes}\mathscr{E}}\right)\right]dx=1.$$

定理 9.5. 空間 L_M^* 中按范数 $\|u\|_{(M)}$ 的单位球与滿足 $\rho(u;\ M)\leqslant 1$ 的函数 $u(x)\in L_M$ 的集合相等,更精确的說,从 $\|u\|_{(M)}\leqslant 1$ 可推出 $\rho(u;\ M)\leqslant\|u\|_{(M)}$, 又从 $\|u\|_{(M)}>1$ 可推出 $\rho(u;\ M)\geqslant\|u\|_{(M)}$.

証. 設 $\|u\|_{(M)}\leqslant 1$, 則由(1.17)和(9.21)得到

$$\frac{1}{\|u\|_{(M)}}\int_G M[u(x)]dx\leqslant\int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right]dx\leqslant 1,$$

即 $\rho(u;\ M)\leqslant\|u\|_{(M)}$. 若 $\|u\|_{(M)}>1$, 則由(1.17)对一切充分小的 $\varepsilon>0$ 有

$$\frac{1}{\|u\|_{(M)}-\varepsilon}\int_G M[u(x)]dx\geqslant\int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}-\varepsilon}\right]dx>1,$$

因而由 ε 的任意性便知 $\rho(u;\ M)\geqslant\|u\|_{(M)}$.

定理証毕.

現在来証明范数 $\|u\|_M$ 和 $\|u\|_{(M)}$ 是等价的:

$$\|u\|_{(M)}\leqslant\|u\|_M\leqslant 2\|u\|_{(M)}.\tag{9.24}$$

上述不等式中的第一个前面已經証明,而第二个可由(9.12)和

(9.21)推出：

$$\left\|\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right\|_M \leqslant \int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right]dx + 1 \leqslant 2.$$

从定理 9.5 可推出确定奥尔里奇范数 $\|u\|_M$ 的另一个公式：

$$\|u\|_M = \sup_{\|v\|_{(N)}\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|. \tag{9.25}$$

从 (9.25) 又可导出一个不等式，它自然被称为加强了的荷尔德不等式，即

$$\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \leqslant \|u\|_M\|v\|_{(N)} \tag{9.26}$$

$$(u(x)\in L_M^*,\ v(x)\in L_N^*)$$

和

$$\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \leqslant \|u\|_{(M)}\|v\|_N \tag{9.27}$$

$$(u(x)\in L_M^*,\ v(x)\in L_N^*).$$

§10. 空間 E_M

1. 定义. 我們用 E_M 来表示有界函数的集合在 L_M^* 中的閉包.

我們已經証明，有界函数的集合在平均收斂意义下到处稠密于奥尔里奇类 L_M. 于是从定理 9.4 可推出，在满足 Δ_2-条件的情况下有界函数的集合到处稠密于奥尔里奇空間 $L_M^* = L_M$. 由此可見，如果 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，則空間 E_M 和 L_M^* 重合.

当 N-函数 $M(u)$ 不满足 Δ_2 条件时，E_M 是 L_M^* 的眞子集，这可从下列包含关系推出：

$$E_M \subset L_M. \tag{10.1}$$

現在来証明这个包含关系. 設 $u_0(x)\in E_M$，又 $u_1(x)$ 是满足 $\|u_0 - u_1\|_M < \frac{1}{2}$ 的有界函数，則由(9.13)可知

$$\int_G M[2u_0(x) - 2u_1(x)]dx \leqslant 2\|u_0 - u_1\|_M < 1,$$

换言之 $2u_0(x) - 2u_1(x) \in L_M$；又因为有界函数必属于 L_M，所以

从集合 L_M 的凸性可推出函数 $u_0(x) = \frac{1}{2}[2u_0(x) - 2u_1(x)] + + \frac{1}{2}[2u_1(x)]$ 同样也属于 L_M.

2. E_M 的可分性. 設 $u(x)$ 是某一有界函数: $|u(x)| \leqslant a$, 則由鲁金定理可找到連續函数列 $u_n(x)$, 使得 $|u_n(x)| \leqslant a$ 幷且 $u(x) - u_n(x)$ 仅在一測度小于 $\frac{1}{n}$ 的集合 $G_n \subset G$ 上异于零,于是由特征函数的范数公式(9.11)可得到

$$\|u - u_n\|_M = \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1}\left|\int_G [u(x) - u_n(x)]v(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2a \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1}\int_{G_n}|v(x)|dx = 2a\|\kappa(x;\ G_n)\|_M =$$

$$= 2a \text{ mes } G_n N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } G_n}\right) \leqslant \frac{2a}{n}N^{-1}(n),$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}\|u - u_n\|_M = 0.$$

由此可見,連續函数的集合在空間 E_M 中到处稠密.

因为对每一个在 G 上連續的函数 $u(x)$ 可找到有理系数的多項式叙列,一致收斂于 $u(x)$; 又容易看出,該叙列按任何奥尔里奇空間的范数收斂于 $u(x)$; 因此由有理系数多項式所构成的可数集在空間 E_M 中到处稠密.

由此可見,空間 E_M 可分.

3. 类 L_M 相对于空間 E_M 的位置. 我們已經証明 $E_M \subset L_M$, 現在以 $\Pi(E_M;\ r)$ 表示所有滿足

$$d(u,\ E_M) = \inf_{w\in E_M}\|u - w\|_M < r$$

的函数 $u(x) \in L_M^*$ 的集合,又以 $\overline{\Pi}(E_M;\ r)$ 表示 $\Pi(E_M;\ r)$ 的閉包.

下列定理(图7)完全充分的描述了类 L_M 相对于空間 E_M 的位置.

定理 10.1. 設 N-函数 $M(u)$ 不滿足 Δ_2-条件,則

$$\Pi(E_M;\ 1) \subset L_M \subset \overline{\Pi}(E_M;\ 1) \tag{10.2}$$

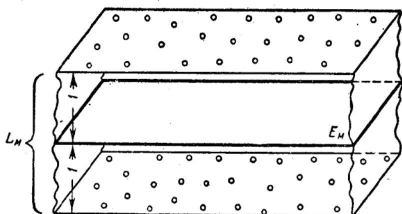


图 7

并且 $\Pi(E_M; 1)$ 是 L_M 的真子集，而 L_M 又是 $\overline{\Pi}(E_M; 1)$ 的真子集.

証. 首先証明每一个函数 $u(x) \in E_M$ 的半径为 1 的开球邻域都包含在 L_M 内，这样也就証明了(10.2)中的第一个包含关系.

設 $u(x) \in L_M^*$ 并且 $\|u - u_0\|_M < 1$，则可找到数 $\alpha > 0$ 使得 $\|u - u_0\|_M < 1 - \alpha$. 因集合 E_M 是綫性的，故函数 $\frac{1}{\alpha} u_0(x) \in E_M$，从而由 (10.1) 可知 $\frac{1}{\alpha} u_0(x) \in L_M$. 又因 $\left\| \frac{u - u_0}{1 - \alpha} \right\|_M < 1$，故由 (9.14)有 $\frac{u(x) - u_0(x)}{1 - \alpha} \in L_M$. 于是从集合 L_M 的凸性可推出函数 $u(x) = (1 - \alpha)\left[\frac{u(x) - u_0(x)}{1 - \alpha}\right] + \alpha \frac{u_0(x)}{\alpha}$ 属于 L_M.

为了証明 (10.2) 中的第二个包含关系，让我們来驗証每一个函数 $u(x) \in L_M$ 与 E_M 的距离不大于 1.

由于积分的絕对連續性，所以对任何 $\varepsilon > 0$ 可找到有界函数 $u_\varepsilon(x) \in E_M$ 使得

$$\int_G M[u(x) - u_\varepsilon(x)]dx < \varepsilon.$$

此时由不等式(9.12)有 $\|u - u_\varepsilon\|_M < 1 + \varepsilon$，因而

$$d(u, E_M) = \inf_{w \in E_M} \|u - w\|_M \leqslant \|u - u_\varepsilon\|_M < 1 + \varepsilon,$$

再由 ε 的任意性便知 $d(u, E_M) \leqslant 1$.

剩下要証的是(10.2)中包含关系的严格性.

在§8第4段中已經作出这样的函数$u_*(x)\in L_M$,使当$\beta\leqslant 1$时$\beta u_*(x)\in L_M$,又当$\beta>1$时$\beta u_*(x)\bar{\in} L_M$. 今証$u_*(x)\bar{\in}\Pi(E_M;1)$. 事实上,若$d(u_*, E_M)$小于1,则可找到$\beta>1$使得

$$d(\beta u_*, E_M)=\inf_{w\in E_M}\|\beta u_*-w\|_M=\beta\inf_{w\in E_M}\|u_*-w\|_M<1,$$

于是由(10.2)中的第一个包含关系可推出$\beta u_*(x)\in L_M$,这与函数$u_*(x)$的基本性质发生冲突. 这样就証明了$\Pi(E_M;1)$是L_M的真子集.

在§8同一段中还作出了这样的函数$u^*(x)\bar{\in} L_M$,使当$\beta<1$时$\beta u^*(x)\in L_M$,又当$\beta\geqslant 1$时$\beta u^*(x)\bar{\in} L_M$. 今証$u^*(x)\in\overline{\Pi}(E_M;1)$,这样定理的証明就全部完成.

事实上,$d(u^*, E_M)=1$,因为在相反的情况下可找到$\beta<1$使得$d(\beta u^*, E_M)>1$,从而由(10.2)中的第二个包含关系可推出$\beta u^*(x)\bar{\in} L_M$,这又和$u^*(x)$的基本性质发生冲突.

定理証毕.

定理結論的第二部分說明了如果N-函数$M(u)$不滿足Δ_2-条件,那末类L_M在空間L_M^*中既非开集,又非閉集. 我們託讀者自己証明,此时集合L_M在平均收斂意义下是不完全的.

从定理8.2可推出下列附記: 若N-函数$M(u)$不满足Δ_2-条件,则有界函数的集合在L_M^*无处稠密,因为一切有界函数均位于E_M內.

空間E_M可看成包含在L_M內的空間L_M^*的极大綫性子空間,这可从下列事实推出: $u(x)\in E_M$当且仅当对一切λ的值有$\lambda u(x)\in L_M$.

假定$u(x)\in L_M^*$并且

$$d(u, E_M)=\inf_{w\in E_M}\|u-w\|_M>0,$$

則函数$u(x)$可用有界函数按L_M^*的范数加以逼近并且精确度达到$d(u, E_M)+\varepsilon$,其中ε是任意正数. 在許多情况下,选出特殊方式的有界函数来逼近更为方便.

引理 10.1. 对任何函数 $u(x) \in L_M^*$ 恒有等式

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_M = d(u, E_M),$$

其中

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & 若 |u(x)| \leqslant n, \\ 0, & 若 |u(x)| > n. \end{cases}$$

証. 由于函数 $|u(x) - u_n(x)|$ 非上升，所以它的范数也非上升并且有极限. 显然

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_M \geqslant d(u, E_M).$$

剩下我們来証明相反的不等式.

設 ε 是任意正数并且

$$\frac{1}{d(u, E_M) + 2\varepsilon} < \alpha < \frac{1}{d(u, E_M) + \varepsilon},$$

则

$$d(\alpha u, E_M) = \inf_{w\in E_M} \|\alpha u - w\|_M = \alpha \inf_{w\in E_M} \|u - w\|_M <$$

$$< \frac{d(u, E_M)}{d(u, E_M) + \varepsilon} < 1,$$

故

$$\int_G M[\alpha u(x)]dx < \infty.$$

由积分的絕对連續性可找到这样的 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时

$$\int_G M[\alpha u(x) - \alpha u_n(x)]dx < \alpha\varepsilon,$$

因而推出 $\|\alpha u - \alpha u_n\|_M < 1 + \alpha\varepsilon$，即有 $\|u - u_n\|_M < \frac{1}{\alpha} + \varepsilon <$ $< d(u, E_M) + 3\varepsilon$，再由 ε 的任意性便得

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_M \leqslant d(u, E_M).$$

引理証毕.

4. 奥尔里奇空間可分性的必要条件. 前面已經証明空間 E_M 恆可分. 换言之，如果 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件，則空間 $L_M^* = L_M = E_M$ 可分.

定理 10.2. 設 N-函数 $M(u)$ 不滿足 Δ_2-条件，則空間 L_M^* 不可分.

証. 假定 L_M^* 可分并且設 $u_n(x)\,(n=1, 2, \cdots)$ 是 L_M^* 的可数到处稠密集. 由魯金定理可找到具有非零測度的集合 $G_1 \subset G$，使得 $u_n(x)\,(n=1, 2, \cdots)$ 在其上連續.

考慮空間 $L_M^*(G_1)$ 并且以 $E_M(G_1)$ 表示在 G_1 上有界的函数的集合在 $L_M^*(G_1)$ 內的閉包，則定义在 G_1 上并且在这个集合上与相应的函数 $u_n(x)$ 一致的函数 $w_n(x)\,(n=1, 2, \cdots)$ 属于 $E_M(G_1)$.

由定理 10.1 可找到这样的函数 $w(x) \in L_M^*(G_1)$，使得 $d(w, E_M(G_1)) > 1$. 令

$$u(x) = \begin{cases} w(x), & 若\ x \in G_1, \\ 0, & 若\ x \in G \setminus G_1, \end{cases}$$

則

$$\|u - u_n\|_M = \sup_{\rho(v;N) \leqslant 1} \left| \int_G [u(x) - u_n(x)] v(x) dx \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\rho(v;N) \leqslant 1} \left| \int_{G_1} [u(x) - u_n(x)] v(x) dx \right| = \|w - w_n\|_M > 1.$$

換言之，叙列 $u_n(x)\,(n=1, 2, \cdots)$ 在空間 L_M^* 內不稠密. 于是得到矛盾.

定理証毕.

5. 关于范数的定义. 因为 $E_N \subset L_N$，所以

$$\sup_{\substack{\rho(v;N) \leqslant 1 \\ v \in E_N}} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| \leqslant \sup_{\rho(v;N) \leqslant 1} \left| \int_G u(x) v(x) dx \right| = \|u\|_M. \quad (10.3)$$

任給 $\varepsilon > 0$，則可找到 $v_0(x) \in L_N$ 滿足条件 $\rho(v_0; N) \leqslant 1$ 并且使得

$$\int_G u(x) v_0(x) dx \geqslant \|u\|_M - \varepsilon.$$

命

$$v_n(x) = \begin{cases} v_0(x), & 若\ |v_0(x)| \leqslant n, \\ 0, & 若\ |v_0(x)| > n, \end{cases}$$

显然 $v_n(x) \in E_N$，并且

$$\rho(v_n; N) \leqslant \rho(v_0; N) \leqslant 1 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

又从积分的絕对連續性可推出对充分大的 n 有

$$\int_G u(x)v_n(x)dx \geqslant \int_G u(x)v_0(x)dx - \varepsilon \geqslant \|u\|_M - 2\varepsilon,$$

因而

$$\sup_{\substack{\rho(v;N)\leqslant 1\\ v\in E_N}} \left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \geqslant \int_G u(x)v_n(x)dx \geqslant \|u\|_M - 2\varepsilon.$$

再由于 ε 的任意性，从所得到的不等式和 (10.3) 可推出空間 L_M^* 中范数的一种新的表达式：

$$\|u\|_M = \sup_{\substack{\rho(v;N)\leqslant 1\\ v\in E_N}} \left|\int_G u(x)v(x)dx\right|. \tag{10.4}$$

我們証明公式 (10.4)，确定奥尔里奇空間中的范数是已經假定了 $u(x) \in L_M^*$. 如同定理 9.1 的証明方法，从积分 $\int_G u(x)v(x)dx$ 对一切 $v(x) \in E_N$ 的有限性可推出函数 $u(x)$ 属于空間 L_M^*. 定理 9.1 的証明的修改处仅在于从 E_N 内选出函数 $v_n(x)$，至于函数 $g(x)$ 同样属于 E_N，因为确定此函数的級数按范数收斂，而 E_N 封閉。

6. 范数的絕对連續性. 我們称函数 $u(x) \in L_M^*$ 具有絕对連續的范数，假如对每一个 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|u\kappa(x, \mathscr{E})\|_M = \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \left|\int_{\mathscr{E}} u(x)v(x)dx\right| < \varepsilon,$$

只要 $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \delta (\mathscr{E} \subset G)$.

定理 10.3. 函数 $u(x) \in L_M^*$ 具有絕对連續的范数的充要条件为 $u(x) \in E_M$.

証. 設 $u(x) \in E_M$，任給 $\varepsilon > 0$，則有有界函数 $u_1(x)$: $|u_1(x)| \leqslant a$ $(x \in G)$ 使得

$$\|u - u_1\|_M < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为函数 $vN^{-1}\left(\frac{1}{v}\right)$ 当 $v \geqslant 0$ 时单調增加，所以方程

$$\delta N^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right) = \frac{\varepsilon}{2a}$$

有唯一解 $\delta > 0$.

設 $\text{mes}\,\mathscr{E} < \delta(\mathscr{E} \subset G)$, 則由特征函数的范数公式(9.11)可得

$$\|u\kappa(x;\mathscr{E})\|_M \leqslant \|u - u_1\|_M + a\|\kappa(x;\mathscr{E})\|_M \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + a\,\text{mes}\,\mathscr{E} N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes}\,\mathscr{E}}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + a\delta N^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right) = \varepsilon.$$

于是函数 $u(x) \in E_M$,范数的絕对連續性获証.

現在假定函数 $u(x) \in L_M^*$ 的范数絕对連續,又以 G_n 表示集合 $G\{|u(x)| \leqslant n\}$. 因为函数 $u(x)$ 可求和,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\text{mes}(G \setminus G_n) = 0$. 因而由范数的絕对連續性可推出

$$\lim_{n\to\infty}\|u - u\kappa(x;G_n)\|_M = 0.$$

由此可見, $u(x)$ 是有界函数列的极限,从而属于 E_M.

定理証毕.

从定理 10.3 可推出空間 E_M 是 L_M^* 中所有具有絕对連續范数的函数的集合.

从这个定理又可推出空間 L_M^* 中一切函数具有絕对連續范数的充要条件为 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件.

7. 范数的計算. 通常的公式

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|$$

不能真正用来計算范数,于是自然提出关于范数的另外表示形式的問題.

定理 10.4. 設 $u(x) \in L_M^*$ 并且存在正数 k^* 使得

$$\int_G N[p(k^*|u(x)|)]dx = 1, \tag{10.5}$$

其中 $p(u)$ 是 N-函数 $M(u)$ 的右导数,则

$$\|u\|_M = \int_G p(k^*|u(x)|)|u(x)|dx. \tag{10.6}$$

証. 由(10.5)得到

$$\int_G p(k^*|u(x)|)|u(x)|dx \leqslant \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| = \|u\|_M.$$

另一方面,由楊格不等式

$$\|u\|_M = \frac{1}{k^*} \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \left| \int_G k^* u(x) v(x) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^*}\left(1 + \int_G M[k^* u(x)] dx\right),$$

再由(10.5)

$$\|u\|_M \leqslant \frac{1}{k^*}\left(\int_G N[p(k^*|u(x)|)] dx + \int_G M[k^* u(x)] dx\right),$$

于是利用(2.7)得到

$$\|u\|_M \leqslant \frac{1}{k^*}\int_G p(k^*|u(x)|) k^* |u(x)| dx =$$

$$= \int_G p(k^*|u(x)|)|u(x)| dx.$$

定理証毕.

为了找出数 k^*，也可以利用(2.7)将方程(10.5)改写成如下的形式：

$$k^* \int_G |u(x)| p(k^*|u(x)|) dx - \int_G M[k^* u(x)] dx = 1. \quad (10.7)$$

由此可见，利用定理 10.4 来計算范数只須知道 N-函数 $M(u)$ 和它的导数 $p(u)$.

注意，滿足 (10.5) 的常数 k^* 并不是常常可以找到. 譬如，若 $p(u)$ 不連續，則数 k^* 甚至对集合 G 的特征函数还不能选出，假如 $N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } G}\right)$ 不属于函数 $p(u)$ 的值域.

另一方面，若函数 $p(u)$ 有积分常数，則数 k^* 并不唯一地确定.

如果函数 $p(u)$ 連續，則数 k^* 对任何有界函数可以选出. 这可从下列事实推出：函数

$$J(k) = \int_G N[p(k|u(x)|)] dx$$

对一切 $k > 0$ 有定义并且連續，同时 $J(0) = 0$，$J(\infty) = \infty$.

后面（見 § 18 第 10 段）将要証明数 k^* 对任意函数 $u(x) \in E_M$ 可以找到，假如函数 $p(u)$ 連續.

公式（10.6）可以用来实际的計算范数并且能够任意地精确．这个計算归結为求方程(10.5)关于 k^* 的近似解以及积分(10.6)的計算．

注意定理 10.4 对函数 $p(u)$ 連續的情况可以得到特征函数的范数的熟知公式．

作为例子，我們来計算函数 $u(x) = x$ 在空間 $L_M^*([0, 1])$ 中的范数，其中 $M(u) = e^{|u|} - |u| - 1$．因为此时

$$N[p(u)] = ue^u - e^u + 1,$$

故方程(10.5)有形式

$$\int_0^1 (k^* x e^{k^* x} - e^{k^* x} + 1) dx = 1.$$

由此得到 k^* 是下列方程的正根：

$$e^k = \frac{2}{2-k}. \tag{10.8}$$

公式(10.6)确定了范数的値为

$$\|u\|_M = \int_0^1 (e^{k^* x} - 1) x dx,$$

因而由(10.8)

$$\|u\|_M = \frac{1}{k^*(2-k^*)} - \frac{1}{2}.$$

可求出方程（10.8）的近似解（例如用图解法，图 8）．易知 $k^* \approx 1.587$．这样一来 $\|u\|_M \approx 1.027$．

定理 10.4用来計算有界函数的范数是很方便的．注意对任何函数 $u(x) \in L_M^*$ 我們可作出有界函数列 $u_n(x)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_M = \|u\|_M.$$

函数 $u_n(x)$ 譬如就可以通过下列等式加以确定：

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{当 } |u(x)| \leqslant n \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } |u(x)| > n \text{ 时}. \end{cases} \tag{10.9}$$

事实上，$\|u_1\|_M \leqslant \|u_2\|_M \leqslant \cdots \leqslant \|u_n\|_M \leqslant \cdots \leqslant \|u\|_M$．假設給定 $\varepsilon > 0$，則可找到函数 $v_0(x)$ 使得 $\rho(v_0; N) \leqslant 1$ 并且

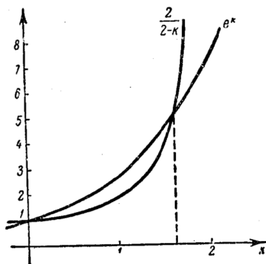


图 8

$$\int_G |u(x)v_0(x)|dx > \|u\|_M - \varepsilon.$$

由勒貝格积分号下取极限的定理对充分大 n

$$\int_G |u_n(x)v_0(x)|dx > \|u\|_M - \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_M \geqslant \|u\|_M - \varepsilon$. 再由 ε 的任意性 $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_M \geqslant \|u\|_M$.

8. 一个范数公式. 在定理 10.4 的条件下

$$\|u\|_M = \frac{1}{k^*}\left(1 + \int_G M[k^*u(x)]dx\right).$$

另一方面,对任何函数 $u(x) \in L_M^*$,当 $k > 0$ 时

$$\|u\|_M = \frac{1}{k} \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \left|\int_G ku(x)v(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\left(1 + \int_G M[ku(x)]dx\right). \tag{10.10}$$

因此在定理 10.4 的条件下

$$\|u\|_M = \min_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_G M[ku(x)]dx\right).$$

这个公式可以拓广成为

定理 10.5. 設 $M(u)$ 是任意的 N-函数, $u(x) \in L_M^*$, 则有公

式

$$\|u\|_M = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_G M[ku(x)]dx\right). \qquad (10.11)$$

証. 首先假定函数 $p(u)$ 連續，則每一个有界函数的范数可由公式(10.5)和(10.6)确定之. 我們已經証明在这种情况下范数又可由公式(10.11)来确定.

設 $u(x)$ 是 L_M^* 中的任意函数. 又設 $u_n(x)$ 是由等式(10.9)所确定的函数并且

$$\|u_n\|_M = \frac{1}{k_n}\left(1 + \int_G M[k_n u_n(x)]dx\right), \qquad (10.12)$$

其中

$$\int_G N[p(k_n|u_n(x)|)]dx = 1.$$

从上述等式可推出 k_n 是非漸升的数列，又此时

$$\frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n}\left(1 + \int_G M[k_n u_n(x)]dx\right) = \|u_n\|_M \leqslant \|u\|_M,$$

因而数列 k_n 收斂于某一正数 k^*.

給定 $\varepsilon > 0$，由(10.12)对充分大的 n

$$1 + \int_G M[k_n u_n(x)]dx = k_n\|u_n\|_M < (k^* + \varepsilon)\|u\|_M,$$

对此不等式取极限(由法都定理可以这样做)得到

$$1 + \int_G M[k^* u(x)]dx \leqslant (k^* + \varepsilon)\|u\|_M.$$

又由于 ε 的任意性

$$\frac{1}{k^*}\left(1 + \int_G M[k^* u(x)]dx\right) \leqslant \|u\|_M.$$

从这个不等式和(10.10)就推出了(10.11).

現在去掉关于 $p(u)$ 連續性的假設. 对任何 N-函数 $M(u)$ 我們容易作出具有連續导数的 N-函数 $M_1(u)$ 使得

$$M(u) < M_1(u) < (1 + \varepsilon)M(u) \quad (u > 0). \qquad (10.13)$$

从不等式(10.13)可推出[1] $L_M^* = L_{M_1}^*$ 并且

1) 在 § 13 的第 1，2 段中，我們將要証明出比这更強的命題.

$$\|u\|_M \leqslant \|u\|_{M_1} \leqslant (1+\varepsilon)\|u\|_M. \tag{10.14}$$

从同一不等式还可推出

$$\inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1+\int_G M[ku(x)]dx\right) \leqslant \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1+\int_G M_1[ku(x)]dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1+\int_G M[ku(x)]dx\right).$$

因而已經証明了

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|u\|_{M_1} \leqslant \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1+\int_G M[ku(x)]dx\right) \leqslant \|u\|_{M_1}.$$

从这个不等式和(10.14)即可推出

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|u\|_M \leqslant \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1+\int_G M[ku(x)]dx\right) \leqslant (1+\varepsilon)\|u\|_M.$$

再由于 ε 的任意性便知，对函数 $u(x)$ 而言公式(10.11)成立.

定理証毕.

§ 11. 列紧性的判别法

1. 瓦来-布桑定理. 我們記得，函数族 $\mathfrak{N}$ 有等度的絕对連續积分，假如对任何 $\varepsilon>0$ 可选出这样的 $h>0$，使对族 $\mathfrak{N}$ 中的一切函数 $\varphi(x)$ 有

$$\int_{\mathscr{E}} |\varphi(x)|dx < \varepsilon,$$

只要 $\mathrm{mes}\,\mathscr{E} < h$. 下列定理給出某一函数族有等度的絕对連續积分的一般判别法.

瓦来-布桑定理（例如見[38] 142 頁）. 設 $\Phi(u)(0\leqslant u<\infty)$ 是单調增加函数且滿足条件

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty.$$

又設对某一族 $\mathfrak{N}$ 的函数 $\varphi(x)$，$\Phi[|\varphi(x)|]$ 的积分一致有界：

$$\int_G \Phi[|\varphi(x)|]dx \leqslant A < \infty \quad (\varphi(x)\in\mathfrak{N}), \tag{11.1}$$

則族 $\mathfrak{N}$ 有等度的絕对連續积分.

这个簡单的定理对稍为更強一些的假定在[38]中已經証明.

因为每一个 N-函数 $M(u)$ 滿足瓦來-布桑定理的条件，所以，如果函数族 $\mathfrak{N}$ 包含在 L_M 中幷且

$$\rho(u;\ M) = \int_G M[u(x)]dx \leqslant A \quad (u(x) \in \mathfrak{N}), \qquad (11.2)$$

則函数 $u(x)$ 有等度的絕对連續积分.

今設 $M(u)$ 和 $M_1(u)$ 是两个 N-函数，而且有关系式

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(u)}{M_1(u)} = \infty,$$

則从(11.2)可推出函数族 $\mathfrak{N}_1 = \{M_1[u(x)]\}$ 在 G 上有等度的絕对連續积分. 为証此，只須注意函数 $\Phi(u) = M[M_1^{-1}(u)]$ 滿足瓦來-布桑定理的条件，而这一点又可証之如下:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{M[M_1^{-1}(u)]}{u} = \lim_{v\to\infty} \frac{M(v)}{M_1(v)} = \infty.$$

2. 斯捷克洛夫函数. 設 $u(x)$ 是某一在 G 上可求和的函数，我們称

$$u_r(x) = \frac{1}{m_r}\int_{T_r(x)} u(t)dt \quad (x \in G) \qquad (11.3)$$

为 $u(x)$ 的斯捷克洛夫函数，其中 $T_r(x)$ 是以点 $x \in G$ 为中心，r 为半径的 n 維球，m_r 是这个球的体积，另外在积分(11.3)中我們还假定当 $t \overline{\in} G$ 时 $u(t)$ 等于零.

引理 11.1. 設給定的函数族 $\mathfrak{N} \subset L_M^*$ 按范数一致有界: $\|u\|_M \leqslant A(u(x) \in \mathfrak{N})$，則斯捷克洛夫函数族 $\mathfrak{N}_r$: $u_r(x)$ $(u(x) \in \mathfrak{N})$ 按一致范数(即 G 上的連續函数空間 C 的范数)列紧.

証. 因为当 $u(x) \in \mathfrak{N}$ 时

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{A}\right]dx \leqslant \int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_M}\right]dx \leqslant 1, \qquad (11.4)$$

故由楊格不等式

$$|u_r(x)| \leqslant \frac{1}{m_r}\int_{T_r(x)} |u(t)|\,dt \leqslant \frac{A}{m_r}\int_G \frac{|u(x)|}{A}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{m_r}(1 + N(1)\operatorname{mes} G).$$

由此可見，函数族 $\mathfrak{N}_r$ 一致有界.

由于(11.4)，从瓦来-布桑定理可推出函数族 $\mathfrak{N}$ 有等度的絕对連續积分，即对任何 $\varepsilon > 0$，可选出这样的 $h > 0$，使对族中的一切函数 $u(x)$ 有

$$\int_{\mathscr{E}} |u(x)|\, dx < \varepsilon, \tag{11.5}$$

只要 $\operatorname{mes} \mathscr{E} < h (\mathscr{E} \subset G)$.

以 $T_{x,y}$ 表示集合

$$(T_r(x) \cup T_r(y)) \setminus (T_r(x) \cap T_r(y)).$$

假定 $T_{x,y}$ 的体积当 $d(x, y) < \delta$ 时小于 h，則由于(11.5)当 $d(x, y) < \delta$ 时对族 $\mathfrak{N}_r$ 中的一切函数 $u_r(x)$ 有

$$|u_r(x) - u_r(y)| \leqslant \frac{1}{m_r} \int_{T_{x,y}} |u(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{m_r},$$

因而函数族 $\mathfrak{N}_r$ 等度連續.

于是引理的結論由阿尔采拉定理即可推出.

今后將利用下列的不等式:

$$\|u_r\|_M \leqslant \|u\|_M. \tag{11.6}$$

为証此，我們用 T_0 表示以 n 維空間的原点为心、r 为半径的球，則

$$\|u_r\|_M \leqslant \frac{1}{m_r} \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \int_G \int_{T_r(x)} |u(t)v(x)|\, dt\, dx =$$

$$= \frac{1}{m_r} \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \int_G \int_{T_0} |u(x+s)v(x)|\, ds\, dx,$$

交換积分次序并將 sup 取到积分号下面，得到

$$\|u_r\|_M \leqslant \frac{1}{m_r} \int_{T_0} \left[\sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \int_G |u(x+s)v(x)|\, dx \right] ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{s \in G} \|u(x+s)\|_M;$$

又因从 $u(t) = 0$ 当 $t \overline{\in} G$ 时可推出对任何 $s \in G$ 有

$$\|u(x+s)\|_M = \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \int_G |u(x+s)v(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \int_G |u(t)v(t-s)|\, dt \leqslant \|u\|_M, \tag{11.7}$$

故不等式(11.6)获証.

3. 空間 E_M 的柯尔莫廓洛夫的列紧性判别法.

定理 11.1. 空間 E_M 的函数族 $\mathfrak{N}$ 列紧的充要条件为满足条件:

a) $\|u\|_M \leqslant A(u(x) \in \mathfrak{N})$;

б) 对任何 $\varepsilon > 0$ 可找到这样的 $\delta > 0$, 使得从 $r < \delta$ 可推出

$$\|u - u_r\|_M < \varepsilon$$

对族 $\mathfrak{N}$ 中的一切函数成立.

証. 条件 a) 和 б) 的充分性由引理 1.1 和弗力許 (Fréchet) 定理[1]即可推出,这是因为 C 中列紧的函数集在每一个奥尔里奇空間内也是列紧的.

設 $\mathfrak{N}$ 是 E_M 中列紧的函数族, 则对該函数族可作出由連續函数 $u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), \cdots, u^{(n)}(x)$ 組成的 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网, 其中 $u^{(i)}(x)(i=1, 2, \cdots, n)$ 可以不属于 $\mathfrak{N}$. 以 c 表示整个集合 G 的特征函数 $\kappa(x; G)$ 的范数, 設 $r > 0$ 是这样的数,使得当 $d(x, t) < r$ 时有

$$|u^{(i)}(x) - u^{(i)}(t)| < \frac{\varepsilon}{3c} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

则

$$|u_r^{(i)}(x) - u^{(i)}(x)| \leqslant \frac{1}{m_r}\int_{T_r(x)} |u^{(i)}(t) - u^{(i)}(x)|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3c}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

于是

$$\|u_r^{(i)} - u^{(i)}\|_M \leqslant \frac{\varepsilon}{3c}\|\kappa(x;\ G)\|_M = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11.8}$$

設 $u(x)$ 是 E_M 中的任意函数, 则可找到函数 $u^{(i_0)}(x)$ 使得 $\|u - u^{(i_0)}\|_M < \frac{\varepsilon}{3}$. 从而由(11.6)和(11.8)

$$\|u-u_r\|_M \leqslant \|u-u^{(i_0)}\|_M+\|u^{(i_0)}-u_r^{(i_0)}\|_M+\|u_r^{(i_0)}-u_r\|_M \leqslant$$
$$\leqslant 2\|u - u^{(i_0)}\|_M + \|u^{(i_0)} - u_r^{(i_0)}\|_M < \varepsilon.$$

---

1) 弗力許定理. 集合列紧,假如它可由列紧集任意精确地逼近.

由此可见，条件 б) 的必要性获証。至于条件 a) 的必要性是明显的。

定理証毕。

因为当 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件时 $E_M = L_M = L_M^*$，所以在满足 Δ_2-条件的情况下定理 11.1 給出了 L_M 中函数族的列紧性的必要且充分的判别法。由于在这种情况下按范数收斂与平均收斂等价，因而又得到

定理 11.2. 設 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，則函数族 $\mathfrak{N} \subset L_M = L_M^*$ 列紧的充要条件为满足条件：

a) $\int_G M[u(x)]dx \leqslant A \quad (u(x) \in \mathfrak{N})$；

б) 对任何 $\varepsilon > 0$ 可选出这样的 $\delta > 0$，使对 $\mathfrak{N}$ 中的一切函数当 $r < \delta$ 时有

$$\int_G M[u(x) - u_r(x)]dx < \varepsilon.$$

4. 列紧性的第二种判别法. 我們称函数 $u(x) \in L_M^*$ 的族 $\mathfrak{N}$ 有等度的絕对連續范数，假如对每一个 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$，使对族中的一切函数有 $\|u\kappa(x; \mathscr{E})\|_M < \varepsilon$，只要 $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \delta$。显然在这种情况下 $\mathfrak{N} \subset E_M$。

若 $\mathfrak{N}$ 是某一在 E_M 中列紧的集合，則按通常的討論方法可以証明，它具有等度的絕对連續范数。

引理 11.2. 依測度收斂的函数列 $u_n(x) \in E_M (n=1, 2, \cdots)$，按范数收斂的充要条件为該函数列有等度的絕对連續范数。

証. 条件的必要性从收斂的叙列必为列紧集即可推出。今証引理条件的充分性。

設叙列 $u_n(x) \in E_M (n = 1, 2, \cdots)$ 依測度收斂并且有等度的絕对連續范数。給定 $\varepsilon > 0$，以 $\mathscr{E}_{mn}$ 表示集合 $G\{|u_n(x) - u_m(x)| > \eta\}$，其中

$$\eta = \frac{\varepsilon}{3 \operatorname{mes} G \, N^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes} G}\right)}.$$

設 $\delta > 0$ 是这样的数,使当 $\text{mes}\, \mathscr{E} < \delta$ 时

$$\|u_n \kappa(x; \mathscr{E})\|_M < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因叙列 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 依测度收斂,故可选出 n_0 使得 $\text{mes}\, \mathscr{E}_{mn} < \delta$ 当 $n, m > n_0$ 时.

因此当 $n, m > n_0$ 时

$$\|u_n - u_m\|_M \leqslant$$
$$\leqslant \|(u_n - u_m)\kappa(x; \mathscr{E}_{mn})\|_M + \|(u_n - u_m)\kappa(x; G/\mathscr{E}_{mn})\|_M \leqslant$$
$$\leqslant \|u_n \kappa(x; \mathscr{E}_{mn})\|_M + \|u_m \kappa(x; \mathscr{E}_{mn})\|_M + \eta \|\kappa(x; G)\|_M < \varepsilon.$$

換言之,叙列 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 L_M^* 中收斂.

引理証毕.

定理 11.3. 設函数族 $\mathfrak{N} \subset E_M$ 有等度的絕对連續范数并且在測度收斂意义下列紧,則 $\mathfrak{N}$ 在 L_M^* 中也列紧.

証. 根据假設从 $\mathfrak{N}$ 中的每一个叙列可选出依測度收斂的子叙列,再由引理 11.2,这个子叙列按 L_M^* 的范数收斂.

定理証毕.

定理的第二个条件关于在測度收斂意义下的列紧性的驗証通常是归結到証明 $\mathfrak{N}$ 在某一异于 L_M^* 的奥尔里奇空間内列紧.

5. 空間 E_M 的黎斯(F. Riesz)的列紧性判別法. 我們再指出 E_M 内的函数族的列紧性的一种判別法.

定理 11.4. 空間 E_M 的函数族 $\mathfrak{N}$ 列紧的充要条件为滿足条件:

a) $\|u\|_M \leqslant A$, $(u(x) \in \mathfrak{N})$;

б) 对任何 $\varepsilon > 0$ 可找到这样的 $\delta > 0$, 使得从 $d(h, 0) < \delta$ 可推出

$$\|u(x + h) - u(x)\|_M < \varepsilon$$

对一切 $u(x) \in \mathfrak{N}$ 成立.

証. 設 $u(x) \in \mathfrak{N}$ 而 $u_r(x)$ 是相应的斯捷克洛夫函数,則

$$|u(x) - u_r(x)| \leqslant \frac{1}{m_r} \int_{T_r(x)} |u(x) - u(t)|\, dt,$$

因而对 $v(x) \in L_N$, $\rho(v; N) \leqslant 1$

$$\int_G |u_r(x) - u(x)| v(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_r} \int_G \left[\int_{T_r(x)} |u(t) - u(x)| dt \right] v(x) dx.$$

交换积分顺序并进行变量替换,得到

$$\int_G |u(x) - u_r(x)| v(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_r} \int_{T_0} \left[\int_G |u(x+s) - u(x)| v(x) dx \right] ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_r} \int_{T_0} \|u(x+s) - u(x)\|_M ds,$$

从而

$$\|u - u_r\|_M = \sup_{\rho(v;N) \leqslant 1} \left| \int_G [u(x) - u_r(x)] v(x) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_r} \int_{T_0} \|u(x+s) - u(x)\|_M ds.$$

从上述不等式可推出,当所証定理的条件 б) 满足时定理 11.1 的条件 б) 也满足. 又这些定理的条件 a) 相同.

于是定理的条件的充分性获証.

今証这些条件的必要性. 設 $\mathfrak{N}$ 是 E_M 中列紧的函数族, 則对該函数族可作出由連續函数 $u^{(1)}(x)$, $u^{(2)}(x)$, $\cdots$, $u^{(n)}(x)$ 組成的 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网. 以 c 表示整个集合 G 的特征函数在空間 L_M^* 中的范数.

設 $\delta > 0$ 是这样的数,使得当 $d(h, 0) < \delta$ 时

$$|u^{(i)}(x+h) - u^{(i)}(x)| < \frac{\varepsilon}{3c} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

則显然有

$$\|u^{(i)}(x+h) - u^{(i)}(x)\|_M \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \quad (11.9)$$

設 $u(x)$ 是 $\mathfrak{N}$ 中的任意函数, 則可找到函数 $u^{(i_0)}(x)$ 使得 $\|u - u^{(i_0)}\|_M < \frac{\varepsilon}{3}$. 从而由(11.9)和(11.7)

$$\|u(x+h)-u(x)\|_M \leqslant$$
$$\leqslant \|u(x+h)-u^{(i_0)}(x+h)\|_M + \|u^{(i_0)}(x+h)-$$
$$-u^{(i_0)}(x)\|_M + \|u^{(i_0)}(x)-u(x)\|_M < \varepsilon.$$

由此可見，条件б）的必要性获証．至于条件a）的必要性是明显的．

定理証毕．

§12. 基的存在

1. 轉到确定在区間上的函数的空間． 下面我們将要討論确定在有限区間上的函数的奥尔里奇空間．这样并不破坏結果的一般性，这是因为空間 $L_M^*(G)$ 和空間 $L_M^*([0, \text{mes}\, G])$ 綫性等距，即 $L_M^*(G)$ 和 $L_M^*([0, \text{mes}\, G])$ 的元素之間存在保持范数的綫性一一对应．

为了叙述的簡洁起見，这里仅对 G 是具有笛卡儿坐标系 (ξ_1, ξ_2) 的平面上的有界閉集的情形加以証明．

假定集合 G 包含在某一方形 B_0:

$$(|\xi_1| \leqslant b,\ |\xi_2| \leqslant b)$$

內．我們考虑将方形 B_0 分成 4^n 个以

$$\xi_1 = \frac{b}{2^{n-1}}\, i \quad 和 \quad \xi_2 = \frac{b}{2^{n-1}}\, j$$

$$(i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 2^{n-1})$$

为頂点的方形 $B_n^k (k = 1, 2, \cdots, 4^n)$ 的一系列分划 T_n．

从分划 T_n 过渡到分划 T_{n+1} 时，易見分划 T_n 的每一个方形分成分划 T_{n+1} 的四个相等的方形（图 9）．

今建立从所有分划的方形的全体到区間 $I_0 = [0, \text{mes}\, G]$ 的某些子区間的全体上的映象，使得 B_n^k 的象 I_n^k 的长度等于 $\text{mes}(G \cap B_n^k)$．規定方形 B_0 对应于整个区間 I_0．假設分划 T_n 的某个方形 B_n^k 对应于区間 $[\alpha, \beta] \subset I_0$；我們把 B_n^k 对分划 T_{n+1} 所分成的四个方形按照解析几何中象限的順序依次記为 $B^{\text{I}}, B^{\text{II}}, B^{\text{III}}, B^{\text{IV}}$；又以分点 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$，其中 $\alpha \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \gamma_3 \leqslant \beta$，将区間 $[\alpha, \beta]$

图 9

分为四部分并且使得

$$\gamma_1 - \alpha = \text{mes}(G \cap B^{\text{I}}),$$
$$\gamma_2 - \gamma_1 = \text{mes}(G \cap B^{\text{II}}),$$
$$\gamma_3 - \gamma_2 = \text{mes}(G \cap B^{\text{III}}),$$
$$\beta - \gamma_3 = \text{mes}(G \cap B^{\text{IV}});$$

现在规定方形 B^{I}, B^{II}, B^{III} 和 B^{IV} 分别对应于区間 $[\alpha, \gamma_1]$, $[\gamma_1, \gamma_2]$, $[\gamma_2, \gamma_3]$ 和 $[\gamma_3, \beta]$.

命任意的集合 $P \subset G$ 对应于集合 $Q \subset I_0$, 它是由收縮到集合 P 的点的方形(属于分划 T_n)套对应的区間套所确定的点組成的, 则此映象保持集合的测度(这是明显的, 假如注意到一切分划 T_n 的方形的边的全体的象测度为零). 假如以 G_1 表示具有下列性質的点 $x \in G$ 的集合, 它的任何邻域包含有集合 G 的正测度子集并且它不在分划 T_n 的方形的边上, 那么

$$\text{mes } G_1 = \text{mes } G$$

并且上述所建立的从集合 G 到区間 I_0 上的映象 σ 在 G_1 上是一对一的. 集合 G_1 的象記为 Q_1.

因为属于奥尔里奇空間的函数的确定精确到测度为零的集合上, 所以可認为它們在 $G \setminus G_1$ 上等于零. 規定每一个函数 $u(x) \in L_M^*(G)$ 对应于由下面的等式所确定的函数 $\tilde{u}(t)(t \in I_0)$:

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases}u(x), & 当\ t=\sigma(x)\in Q_1\ 时\\ 0, & 当\ t\bar{\in} Q_1\ 时.\end{cases}$$

显見此对应是綫性的. 由于映象 σ 保持集合的測度,所以 $L_M^*(G)$ 的函数保持范数地变为空間 $L_M^*([0, \text{mes}\, G])$ 内的函数.

同样明显地,空間 $E_M(G)$ 在此对应下变为空間 $E_M([0, \text{mes}\, G])$.

2. 哈尔函数. 我們称由以下的公式所确定的区間 $[0, 1]$ 上的函数为哈尔函数:

$$\chi_0^{(0)}(x)\equiv 1,\ \chi_0^{(1)}(x)=\begin{cases}1, & 当\ 0\leqslant x<\frac{1}{2}\ 时,\\ 0, & 当\ x=\frac{1}{2}\ 时,\\ -1, & 当\ \frac{1}{2}<x\leqslant 1\ 时,\end{cases}$$

并且当 $n=1, 2, \cdots, k=1, 2, \cdots 2^n$ 时

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n}, & 当\ \frac{2k-2}{2^{n+1}}\leqslant x<\frac{2k-1}{2^{n+1}}\ 时,\\ -\sqrt{2^n}, & 当\ \frac{2k-1}{2^{n+1}}\leqslant x<\frac{2k}{2^{n+1}}\ 时,\\ 0, & 对\ x\ 的其它值.\end{cases}$$

我們把哈尔函数 $\chi_n^{(k)}(x)$ 按 n 增加的次序,又对給定的 n 按 k 增加的顺序排成一列,同时将所得到的叙列記为 $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2,\cdots)$. 容易看出,該函数列正交:

$$\int_0^1\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 假如\ i\neq j,\\ 1, & 假如\ i=j.\end{cases}$$

因为所有哈尔函数有界,所以对任何可求和函数 $u(x)$ 可确定出福里哀系数 c_i:

$$c_i=\int_0^1 u(x)\varphi_i(x)dx\quad (i=1, 2, \cdots). \tag{12.1}$$

定义算子 $\mathbf{S}_m$ 如下:

$$\mathbf{S}_m u(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x)\quad (m=1, 2, \cdots).$$

以 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 表示函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ 的不連續点再加上点 0 和 1 按增加的順序排列而成.

引理 12.1. 逐段为常数的函数 $\mathbf{S}_m u(x)$ 对 $a_s < x < a_{s+1}$ 的值由下列等式确定:

$$\mathbf{S}_m u(x) = \frac{1}{a_{s+1} - a_s}\int_{a_s}^{a_{s+1}} u(x)dx.$$

証. 从哈尔函数的定义直接可推出(这由对 m 的归納法即可証实)函数

$$F_m(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)\varphi_i(y)$$

对 $a_s < x < a_{s+1}$ 采取下列的值:

$$F_m(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{s+1} - a_s}, & \text{假如 } a_s < y < a_{s+1}, \\ 0, & \text{假如 } y < a_s \text{ 或 } a_{s+1} < y. \end{cases}$$

因此当 $a_s < x < a_{s+1}$ 时

$$\mathbf{S}_m u(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) \int_0^1 u(y)\varphi_i(y)dy =$$

$$= \int_0^1 u(y)F_m(x, y)dy = \frac{1}{a_{s+1} - a_s}\int_{a_s}^{a_{s+1}} u(y)dy.$$

引理証毕.

3. E_M 的基. 設 $M(u)$ 和 $N(u)$ 是互余的 N-函数.

假如 $u(x)$ 属于空間 $L_M^*([0, 1])$, 則从琴生积分不等式和引理 12.1 可推出,对每一个 m 和 $a_s < x < a_{s+1}$

$$M[\mathbf{S}_m u(x)] = M\left[\frac{1}{a_{s+1} - a_s}\int_{a_s}^{a_{s+1}} u(x)dx\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a_{s+1} - a_s}\int_{a_s}^{a_{s+1}} M[u(x)]dx,$$

从而

$$\int_{a_s}^{a_{s+1}} M[\mathbf{S}_m u(x)]dx \leqslant \int_{a_s}^{a_{s+1}} M[u(x)]dx,$$

于是

$$\int_0^1 M[\mathbf{S}_m u(x)]dx \leqslant \int_0^1 M[u(x)]dx. \tag{12.2}$$

若 $\|u\|_M \leqslant 1$，則由(9.13)

$$\int_0^1 M[u(x)]dx \leqslant 1.$$

所以从不等式(12.2)和(9.12)可推知，当 $\|u\|_M \leqslant 1$ 时

$$\|\mathbf{S}_m u\|_M \leqslant 1 + \int_0^1 M[\mathbf{S}_m u(x)]dx \leqslant 1 + \int_0^1 M[u(x)]dx \leqslant 2.$$

因而

$$\|\mathbf{S}_m\| = \sup_{\|u\|_M \leqslant 1} \|\mathbf{S}_m u\|_M \leqslant 2 \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

由此可見，映空間 $L_M^*([0, 1])$ 到它自己內的綫性算子 $\mathbf{S}_m$ 的范数一致有界.

現在假定函数 $u(x)$ 連續，則由引理 12.1，叙列 $\mathbf{S}_m u(x)$ 收斂于 $u(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致成立，假如从其中去掉一切哈尔函数的可数多个不連續点，故函数 $\mathbf{S}_m u(x)$ 在任何奥尔里奇空間内按范数收斂于 $u(x)$.

于是，算子叙列 $\mathbf{S}_m (m = 1, 2, \cdots)$ 的范数一致有界并且在稠密于 $E_M([0, 1])$ 內的連續函数的集合上強收斂于单位算子. 由熟知的巴拿哈-斯泰因豪斯定理，算子 $\mathbf{S}_m$ 在整个 $E_M([0, 1])$ 上收斂于单位算子. 換言之，对任何函数 $u(x) \in E_M([0, 1])$ 級数

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x), \tag{12.3}$$

其中 c_i 由等式(12.1)所确定，在 L_M^* 内收斂于 $u(x)$.

由此可見，哈尔函数 $\varphi_i(x) (i = 1, 2, \cdots)$ 构成了 $E_M([0,1])$ 的基.

显然函数 $\varphi_i\left(\frac{x}{\text{mes } G}\right) (i = 1, 2, \cdots)$ 确定在 $[0, \text{mes } G]$ 上并且构成了 $E_M([0, \text{mes } G])$ 的基. 从这个事实和本节第一段的討論我們可以导出下面的結論：

定理 12.1. 在空間 $E_M(G)$ 內存在基.

由上述定理可推知，在整个空間 L_M^* 內存在基，假如 N-函数

$M(u)$ 滿足 Δ_2-条件，因为在这种情况下 $E_M = L_M^*$.

福里哀系数(12.1)不仅对 $E_M([0, 1])$ 内的函数，而且对一切函数 $u(x) \in L_M^*([0, 1])$ 有定义. 对使得級数(12.3)收斂的函数 $u(x) \in L_M^*([0, 1])$ 来說，我們可以定义如下的算子 $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x).$$

显見算子 $\mathbf{P}$ 是 E_M 上的射影算子.

今証集合 $L_M^* \setminus E_M$ 里不存在使得級数(12.3)在 L_M^* 内收斂的函数. 事实上，假定对某个函数 $u(x)$ 級数(12.3)收斂，命

$$g(x) = u(x) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x),$$

則函数 $g(x)$ 的一切福里哀系数(12.1)等于零. 由定理 12.1，每一个函数 $v(x) \in E_N([0, 1])$ 可以表成在 $L_N^*([0, 1])$ 内收斂的級数的形式：

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \varphi_i(x).$$

于是我們能够計算函数 $g(x)$ 的范数：由(10.4)

$$\|g\|_M = \sup_{\substack{\rho(v:N) \leqslant 1 \\ v \in E_N}} \left| \int_0^1 g(x) v(x) dx \right| =$$

$$= \sup_{\substack{\rho(v:N) \leqslant 1 \\ v \in E_N}} \left| \sum_{i=1}^{\infty} d_i \int_0^1 g(x) \varphi_i(x) dx \right| = 0.$$

換言之，$g(x) = 0$，从而 $g(x) \in E_M([0, 1])$.

4. 再論关于可分性的条件. 第 10 节里已經証明了空間 L_M^* 不可分，假如 N-函数 $M(u)$ 不滿足 Δ_2-条件. 这个事实也可以通过在空間 L_M^* 内具体作出彼此的距离大于某一常数且具有連續統的势的函数集加以証明. 第一段的討論使我們能够限制在空間 $L_M^*([0, 1])$ 内来作出这样的函数集.

設 N-函数 $M(u)$ 不滿足 Δ_2-条件，則可找到正数列

$$u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \cdots \to \infty,$$

使得

$$M(2u_n) > 2^n M(u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

在 $[0, 1)$ 上作一列互不相交的区間 δ_n，它按指标增加的順序从左向右分布并且长度为

$$\operatorname{mes} \delta_n = \frac{M(u_1)}{2^n M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

这种作法是可能的，因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} \delta_n < 1.$$

此外还假定 1 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$ 的极限点.

定义$[0, 1]$上的函数 $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} 2u_n, & \text{当 } x \in \delta_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \bar{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n \text{ 时}, \end{cases}$$

则函数 $u(x)$ 属于 L_M^*，因为 $\frac{1}{2} u(x) \in L_M$:

$$\int_0^1 M\left[\frac{1}{2} u(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\delta_n} M\left[\frac{1}{2} u(x)\right] dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n) \operatorname{mes} \delta_n < \infty.$$

假設对一切 $0 < \alpha \leqslant 1$ 函数 $\varphi_\alpha(x)$ 由下列等式确定:

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} u(x + 1 - \alpha), & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \alpha \text{ 时}, \\ u(x - \alpha), & \text{当 } \alpha < x \leqslant 1 \text{ 时}, \end{cases}$$

则所有函数均属于 L_M^*.

考虑两个函数 $\varphi_\alpha(x)$ 和 $\varphi_\beta(x)$，其中 $\alpha < \beta$.

根据作法，函数 $\varphi_\beta(x)$ 在区間 $[0, \alpha]$ 上有界. 設

$$|\varphi_\beta(x)| = \varphi_\beta(x) \leqslant A \quad (0 \leqslant x \leqslant \alpha),$$

则可指出这样的正数 $\eta < \alpha$ 使得

$$\|\varphi_\beta \kappa_\eta\|_M < \frac{1}{2}, \tag{12.4}$$

其中 $\kappa_\eta(x)$ 是区間 $[\alpha-\eta,\alpha]$ 的特征函数. 事实上,由特征函数的范数公式(9.11)

$$\|\varphi_\beta\kappa_\eta\|_M \leqslant A\|\kappa_\eta\|_M = A\eta N^{-1}\left(\frac{1}{\eta}\right) < \frac{1}{2}$$

对充分小的 η 成立.

以下估計函数 $\varphi_a(x)\kappa_\eta(x)$ 的范数. 显然,此范数等于函数 $u(x)\hat{\kappa}_\eta(x)$ 的范数,其中 $\hat{\kappa}_\eta(x)$ 是区間 $[1-\eta,1]$ 的特征函数. 引入集合

$$F_n = [1-\eta,1]\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{n}\delta_i\right) \quad (n=1,2,\cdots),$$

又将这些集合的特征函数記为 $\kappa_n(x)(n=1,2,\cdots)$. 在每一个集合 F_n 上函数 $u(x)$ 有界,于是函数 $v_n(x)=p[u(x)\kappa_n(x)](n=1,2,\cdots)$ 同样也有界,当然更属于类 L_N. 由(2.7)

$$\int_0^1 u(x)v_n(x)dx = \int_{F_n} M[u(x)]dx + \int_0^1 N[v_n(x)]dx.$$

今証

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 N[v_n(x)]dx > 1. \tag{12.5}$$

事实上,假如不然,我們不妨設对一切 $n=1,2,\cdots$ 不等式

$$\int_0^1 N[v_n(x)]dx \leqslant 1$$

成立,則函数 $u(x)\hat{\kappa}_\eta(x)$ 属于 L_M, 因为

$$\int_0^1 M[u(x)\hat{\kappa}_\eta(x)]dx \leqslant \sup_{n=1,2,\cdots}\left\{\int_{F_n} M[u(x)]dx + \right.$$

$$\left. + \int_{F_n} N[v_n(x)]dx\right\} = \sup_{n=1,2,\cdots}\int_0^1 u(x)v_n(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1}\int_0^1 u(x)v(x)dx = \|u\|_M < \infty,$$

于是发生矛盾,因为

$$\int_0^1 M[u(x)\hat{\kappa}_\eta(x)]dx = \int_0^1 M[u(x)]dx - \int_0^{1-\eta} M[u(x)]dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(2u_n)M(u_1)}{2^n M(u_n)} - \sup_{x\leqslant 1-\eta} M[u(x)] = \infty.$$

由(12.5)可找到这样的 n_0 使得

$$\int_0^1 N[v_{n_0}(x)]dx = \rho > 1.$$

再由(1.17)

$$\int_0^1 N\left[\frac{v_{n_0}(x)}{\rho}\right]dx \leqslant 1.$$

由此可見,对 $\|u\hat{\kappa}_\eta\|_M$ 有估計式:

$$\|u\hat{\kappa}_\eta\|_M = \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1}\int_0^1 u(x)\hat{\kappa}_\eta(x)v(x)dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 u(x)\hat{\kappa}_\eta(x)\frac{v_{n_0}(x)}{\rho}dx =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left\{\int_{F_{n_0}} M[u(x)]dx + \int_0^1 N[v_{n_0}(x)]dx\right\} > 1. \quad (12.6)$$

从上述不等式和(12.4)可推出

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|_M \geqslant \|\varphi_\alpha\kappa_\eta\|_M - \|\varphi_\beta\kappa_\eta\|_M =$$

$$= \|u\hat{\kappa}_\eta\|_M - \|\varphi_\beta\kappa_\eta\|_M > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

这表明函数 $\varphi_\alpha(x)(0 < \alpha \leqslant 1)$ 彼此間的距离大于 $\frac{1}{2}$.

§13. 不同 N-函数定义的空間

1. 空間的比較. 一般說来,不同 N-函数确定不同的奥尔里奇空間. 例如由 N-函数 $M(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ 确定的空間 L^α 对不同 $\alpha > 1$ 是不同的.

定理 13.1. 設 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 是两个 N-函数,則

$$L^*_{M_1} \subset L^*_{M_2}$$

的充要条件为满足关系式

$$M_2(u) \prec M_1(u),$$

即存在常数 u_0, $k > 0$ 使得

$$M_2(u) \leqslant M_1(ku) \quad (u \geqslant u_0). \quad (13.1)$$

証. 假定条件(13.1)不满足,則可选出无界单調增加的数列

$u_n(n=1, 2, \cdots)$使得

$$M_2(u_n) > M_1(2^n n u_n) \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{13.2}$$

由(1.17)

$$\frac{M_1(nu_n)}{nu_n} \leqslant \frac{M_1(2^n nu_n)}{2^n nu_n},$$

因而

$$M_1(2^n nu_n) \geqslant 2^n M_1(nu_n).$$

結合上述不等式和(13.2),得到

$$M_2(u_n) > 2^n M_1(nu_n). \tag{13.3}$$

設 $G_1, G_2, \cdots$ 是集合G的互不相交的子集,且滿足

$$\operatorname{mes} G_n = \frac{M_1(u_1)\operatorname{mes} G}{2^n M_1(nu_n)} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

这样的集合可以作出,因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} G_n < \operatorname{mes} G.$$

考虑由下列等式确定的函数$u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} nu_n, & \text{当 } x \in G_n (n=1, 2, \cdots), \\ 0, & \text{当 } x \bar{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases}$$

該函数属于空間 $L^*_{M_1}$, 因为

$$\int_G M_1[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M_1[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(nu_n)\operatorname{mes} G_n =$$

$$= M_1(u_1)\operatorname{mes} G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

但該函数不属于空間 $L^*_{M_2}$,因为对一切 $\lambda \geqslant 1$ 函数 $\frac{1}{\lambda} u(x)$ 不属于 L_{M_2}. 事实上,設m是大于λ的整数,则由(13.3)

$$\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\lambda}\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty} M_2\left(\frac{nu_n}{\lambda}\right)\operatorname{mes} G_n \geqslant \sum_{n=m}^{\infty} M_2(u_n)\operatorname{mes} G_n \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=m}^{\infty} 2^n M_1(nu_n)\operatorname{mes} G_n = \infty.$$

于是条件(13.1)的必要性获証. 今証此条件的充分性.

設条件(13.1)满足. 又設函数 $u(x)$ 属于空間 $L_{M_1}^*$, 換言之, 有某一 $\mu > 0$ 使 $\mu u(x) \in L_{M_1}$, 卽

$$\int_G M_1[\mu u(x)]dx < \infty.$$

以 G_0 表示集合 $G\left\{|u(x)| < \frac{k u_0}{\mu}\right\}$, 则由(13.1)

$$\int_G M_2\left[\frac{\mu u(x)}{k}\right]dx = \int_{G_0} M_2\left[\frac{\mu u(x)}{k}\right]dx + \int_{G \setminus G_0} M_2\left[\frac{\mu u(x)}{k}\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant M_2(u_0) \operatorname{mes} G_0 + \int_G M_1[\mu u(x)]dx < \infty.$$

这表明函数 $\frac{\mu}{k} u(x) \in L_{M_2}$, 因而推出 $u(x) \in L_{M_2}^*$.

定理証毕.

我們記得 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 称为等价的 ($M_1(u) \sim M_2(u)$), 假如 $M_1(u) \prec M_2(u)$ 且 $M_2(u) \prec M_1(u)$, 卽存在正常数 k_1, k_2 和 u_0 使得

$$M_1(k_1 u) \leqslant M_2(u) \leqslant M_1(k_2 u) \quad (u \geqslant u_0). \tag{13.4}$$

从定理 13.1 直接可推出

定理 13.2. 空間 $L_{M_1}^*$ 和 $L_{M_2}^*$ 由相同的函数組成, 当且仅当 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 等价.

这个定理是引入 N-函数等价性概念的基础.

2. 范数的不等式.

定理 13.3. 如果 $L_{M_1}^* \subset L_{M_2}^*$, 那末存在常数 $q > 0$ 使得

$$\|u\|_{M_2} \leqslant q\|u\|_{M_1} \quad (u(x) \in L_{M_1}^*). \tag{13.5}$$

証. 由于定理 13.1 和 3.1, $L_{N_2}^* \subset L_{N_1}^*$ 并且可选出 k 和 v_0 使得

$$N_1\left(\frac{v}{k}\right) \leqslant N_2(v) \quad (v \geqslant v_0).$$

此时对一切 v

$$N_1\left(\frac{v}{k}\right) \leqslant N_1\left(\frac{v_0}{k}\right) + N_2(v). \tag{13.6}$$

今設 $v(x) \in L_{N_2}$ 且 $\rho(v; N_2) \leqslant 1$，則由(13.6)

$$\rho\left(\frac{v}{k}; N_1\right) = \int_G N_1\left[\frac{v(x)}{k}\right] dx \leqslant$$
$$\leqslant N_1\left(\frac{v_0}{k}\right) \operatorname{mes} G + \int_G N_2[v(x)] dx \leqslant$$
$$\leqslant N_1\left(\frac{v_0}{k}\right) \operatorname{mes} G + 1 = a.$$

置 $q = ak$，則由上述不等式和(1.17)

$$\rho\left(\frac{v}{q}; N_1\right) = \int_G N_1\left[\frac{v(x)}{ak}\right] dx \leqslant \frac{1}{a}\int_G N_1\left[\frac{v(x)}{k}\right] dx \leqslant 1.$$

于是关系式(13.5)从下列不等式即可推出：

$$\|u\|_{M_2} = \sup_{\rho(v; N_2)\leqslant 1} \left|\int_G u(x) v(x) dx\right| =$$
$$= q \sup_{\rho(v; N_2)\leqslant 1} \left|\int_G u(x) \frac{v(x)}{q} dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant q \sup_{\rho(w; N_1)\leqslant 1} \left|\int_G u(x) w(x) dx\right| = q\|u\|_{M_1}.$$

定理証毕.

不难看出，不等式(13.5)满足并且可取 $q = 1$：

$$\|u\|_{M_2} \leqslant \|u\|_{M_1} \quad (u(x) \in L^*_{M_1}),$$

假如对一切 u 有不等式

$$M_2(u) \leqslant M_1(u).$$

从定理 13.3 特别可推出，由等价的 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 所生成的范数也等价：

$$q_1\|u\|_{M_1} \leqslant \|u\|_{M_2} \leqslant q_2\|u\|_{M_1}. \tag{13.7}$$

因此在許多問題的解决中为了更方便起見，我們可从等价的 N-函数类中选择出适当的 N-函数.

設 $M_\alpha(u) = M(\alpha u)(\alpha > 0)$. 显然 $M_\alpha(u) \sim M(u)$ 并且有等式

$$\|u\|_{M_\alpha} = \alpha\|u\|_M. \tag{13.8}$$

为証此，只須注意 $N_\alpha(v) = N\left(\frac{v}{\alpha}\right)$，从而

$$\|u\|_{M_\alpha} = \sup_{\rho(v;N_\alpha)\leq 1} \left| \int_G u(x)v(x)dx \right| =$$

$$= \sup_{\rho\left(\frac{v}{\alpha};\, N\right)\leq 1} \left| \int_G u(x)v(x)dx \right| =$$

$$= \alpha \sup_{\rho\left(\frac{v}{\alpha};\, N\right)\leq 1} \left| \int_G u(x)\frac{v(x)}{\alpha}dx \right| = \alpha\|u\|_M.$$

3. 按范数收斂的一种判別法. 我們称 N-函数 $M_1(u)$ 增加速度眞快于 N-函数 $M(u)$，假如对任何 $\lambda > 0$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(\lambda u)}{M_1(u)} = 0. \tag{13.9}$$

例如函数 $|u|^\alpha$ 增加速度眞快于 $|u|^\beta$，假如 $\alpha > \beta$. 同样容易看出，两个 N-函数 $M(u)$ 和 $Q(u)$ 的复合函数 $M_1(u) = M[Q(u)]$ 的增加速度眞快于 N-函数 $M(u)$.

不难看出，$M_1(u)$ 增加速度眞快于 $M(u)$ 的充要条件为对每一个 $\varepsilon > 0$

$$M(u) < M_1(\varepsilon u)$$

对自变量較大的値成立.

引理 13.1. 若 $M_1(u)$ 增加速度眞快于 $M(u)$，則 $N(v)$ 增加速度眞快于 $N_1(v)$，其中 $N(v)$ 和 $N_1(v)$ 为相应于函数 $M(u)$ 和 $M_1(u)$ 的余函数.

証. 設給定充分小的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 μ. 由于(13.9)对較大的 u 有不等式

$$M\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \leqslant M_1\left(\frac{u}{\mu}\right).$$

于是根据定理 2.1 和(2.5)，余函数对較大的 v 有不等式

$$N_1(\mu v) \leqslant N(\varepsilon v),$$

因而由(1.17)

$$N_1(\mu v) \leqslant \varepsilon N(v).$$

換言之

$$\lim_{v\to\infty} \frac{N_1(\mu v)}{N(v)} = 0. \tag{13.10}$$

引理証毕.

如果 $M_1(u)$ 增加速度眞快于 $M(u)$，那末有包含关系:

$$L^*_{M_1} \subset E_M. \tag{13.11}$$

因为 E_M 是类 L_M 的极大綫性子集，而 $L^*_{M_1}$ 是类 L_{M_1} 的綫性扩张，所以只須証对任何 λ 而言，函数 $\lambda u(x)$ 恆属于 L_M，假如 $u(x) \in L_{M_1}$. 而这一点又可从下列事实推出，即由(13.9)可知对較大的 u 有 $M(\lambda u) \leqslant M_1(u)$.

引理 13.2. 設 N-函数 $M_1(u)$ 增加速度眞快于 N-函数 $M(u)$，又設函数族 $\mathfrak{N}$ 在空間 $L^*_{M_1}$ 內一致有界: $\|u\|_{M_1} \leqslant a\,(u(x) \in \mathfrak{N})$，則族 $\mathfrak{N}$ 在 L^*_M 中有等度的絕对連續范数.

証. 假設給定充分小的 $\varepsilon > 0$. 命 $\mu = \frac{2a}{\varepsilon}$，由于(13.10)和瓦来-布桑定理(見 90 頁)，函数 $N_1[\mu v(x)]$，其中 $\rho(v; N) \leqslant 1$，有等度的絕对連續积分，即可选出 $\delta > 0$ 使对滿足条件 $\rho(v; N) \leqslant 1$ 的一切函数 $v(x) \in L_N$ 有

$$\int_{\mathscr{E}} N_1[\mu v(x)]\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

只要 $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \delta\,(\mathscr{E} \subset G)$.

設 $u(x) \in \mathfrak{N}$，而 $v(x) \in L_N$，$\rho(v; N) \leqslant 1$，則由楊格不等式可推出当 $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \delta$ 时

$$\left|\int_{\mathscr{E}} u(x) v(x)\,dx\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}} M_1\left[\frac{u(x)}{\mu}\right] dx + \int_{\mathscr{E}} N_1[\mu v(x)]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\frac{u}{\mu}\right\|_{M_1} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

因而对一切函数 $u(x) \in \mathfrak{N}$

$$\|u\kappa(x; \mathscr{E})\|_M = \sup_{\rho(v;N) \leqslant 1} \left|\int_{\mathscr{E}} u(x) v(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$$

只要 $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \delta\,(\mathscr{E} \subset G)$.

引理証毕.

其逆亦眞，即有

引理 13.3. 設 $M(u) \prec M_1(u)$，又設每一个 L^*_M 內有界的函

数集有等度的絕对連續范数，則 N-函数 $M_1(u)$ 增加速度眞快于 $M(u)$.

證. 假定 $M_1(u)$ 增加速度不是眞快于 $M(u)$，則由引理 13.1，函数 $M(u)$ 的余 N-函数 $N(v)$ 的增加速度不是眞快于 $M_1(u)$ 的余 N-函数 $N_1(v)$. 换言之，可找到 $\varepsilon_0 > 0$ 和数列 $v_n \to \infty$ 使得

$$N_1(v_n) > N(\varepsilon_0 v_n) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

从这些不等式可推知，对数列 $w_n = N_1(v_n)$ 而言不等式

$$N^{-1}(w_n) > \varepsilon_0 N_1^{-1}(w_n) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{13.12}$$

成立.

以 $G_n (n = 1, 2, \cdots)$ 表示 G 内滿足条件: $\text{mes}\, G_n = \frac{1}{w_n}$ 的子集. 設

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{w_n}{N_1^{-1}(w_n)}, & \text{当 } x \in G_n \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \bar{\in} G_n \text{ 时}. \end{cases}$$

显然 $\|u_n\|_{M_1} = 1$. 因为 $\text{mes}\, G_n \to 0$，則由引理的条件必有关系式

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n\|_M = 0.$$

这和由(13.12)所推出的不等式

$$\|u\|_M = \frac{w_n}{N_1^{-1}(w_n)} \|\kappa(x; G_n)\|_M = \frac{N^{-1}(w_n)}{N_1^{-1}(w_n)} > \varepsilon_0$$

发生矛盾.

引理証毕.

定理 13.4. 設 N-函数 $M_1(u)$ 增加速度眞快于 N-函数 $M(u)$，又設函数列 $u_n(x) \in L_{M_1} (n = 1, 2, \cdots)$ 平均收斂于零:

$$\lim_{n \to \infty} \int_G M_1[u_n(x)]dx = 0, \tag{13.13}$$

則該函数列按空間 L_M^* 的范数收斂于零:

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n\|_M = 0.$$

證. 从条件(13.13)可推知范数 $\|u_n\|_{M_1} (n = 1, 2, \cdots)$ 一致

有界，因而由引理 13.2 函数列 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在 L_M^* 内有等度的絕对連續范数. 又因为由同一条件 (13.13) 可知該函数列依測度收斂于零，于是由引理 11.2，它按 L_M^* 的范数收斂于零.

定理証毕.

4. 奥尔里奇空間內函数的乘积. 設 $u(x)\in L_{M_1}^*$, $w(x)\in L_\Phi^*$, 一般說来，乘积 $u(x)w(x)$ 甚至可能不是可求和的函数. 不过当 N-函数 $M_1(u)$ 和 $\Phi(u)$ 按某种确定的方式相互联系着时，則可証明乘积 $u(x)w(x)$ 不仅可求和而且属于某个奥尔里奇空間 $L_{M_2}^*$，其中 $M_2(u)$ 是由函数 $M_1(u)$ 和 $\Phi(u)$ 确定的. 本段将研究与这些相联系的一系列問題.

作为第一个例子，我們来考虑 $L_{M_1}^*=L^{\alpha_1}$, $L_\Phi^*=L^{\alpha_2}$ 的情形. 为了使得函数 $u(x)\in L^{\alpha_1}$ 和 $w(x)\in L^{\alpha_2}$ 的乘积 $u(x)w(x)$ 是可求和函数，显然必須滿足不等式

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\leqslant 1.$$

在这种情况下 $u(x)w(x)$ 属于一切 L^γ，其中 $1\leqslant\gamma\leqslant\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$. 而这些明显事实的驗証，則留給讀者.

現在轉到一般的情形.

引理 13.4. 設 $u(x)$ 是某一函数，又設 $u(x)w(x)\in E$ 对一切 $w(x)\in L_\Phi^*$ 成立，其中 E 是某个奥尔里奇空間 $L_{M_2}^*$ 或者是可求和函数的空間 L，則存在常数 $k>0$ 使得

$$\|uw\|_E\leqslant k\|w\|_\Phi.$$

証. 公式

$$\mathbf{A}w(x)=u(x)w(x)\quad (w(x)\in L_\Phi^*)$$

确定了映 L_Φ^* 到 E 內的可加齐次算子. 今証該算子是封閉的[1]. 事实上，設 $\|w_n-w_0\|_\Phi\to 0$ 并且 $\|uw_n-v\|_E\to 0$. 此时函数 $w_n(x)$ 依測度收斂于 $w_0(x)$，由此可知函数 $u(x)w_n(x)$ 依測度收斂于

1) 我們記得算子 $\mathbf{A}$ 称为封閉的，假如从 $\|w_n-w_0\|_\Phi\to 0$ 和 $\|\mathbf{A}w_n-v\|_E\to 0$ 可推出 $v=\mathbf{A}w_0$.

$u(x)w_0(x)$；另一方面函数 $u(x)w_n(x)$ 依測度收斂于 $v(x)$. 因而可推出 $v(x)=u(x)w_0(x)$ 几乎处处成立. 因为封閉算子 $\mathbf{A}$ 定义在整个巴拿哈空間 L_Φ^* 上，所以它是連續的[1].

引理証毕.

引理 13.5. 設 $u(x)w(x)\in E$ 对一切函数 $u(x)\in L_{M_1}^*$, $w(x)\in L_\Phi^*$ 成立，其中 E 是某个奥尔里奇空間 $L_{M_2}^*$ 或者是空間 L，則存在常数 $k>0$ 使得

$$\|uw\|_E\leqslant k\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi. \tag{13.14}$$

証. 如同前一引理的証明，我們考慮由函数 $u(x)\in L_{M_1}^*$, $\|u\|_{M_1}\leqslant 1$ 所确定的綫性算子

$$\mathbf{A}_u w(x)=u(x)w(x)\quad (w(x)\in L_\Phi^*).$$

这些算子在每一个确定的元素 $w(x)\in L_\Phi^*$ 上的值是有界的，因为由引理 13.4,映 $L_{M_1}^*$ 到 E 内的綫性算子 $\mathbf{B}u(x)=u(x)w(x)$ 有界.

根据熟知的共鳴定理(例如参看 [3] 68 頁)，算子 $\mathbf{A}_u$ 的范数一致有界. 設 $\|\mathbf{A}_u\|\leqslant k$,則对任意的函数 $u(x)\in L_{M_1}^*$, $w(x)\in L_\Phi^*$ 恆有

$$\|uw\|_E=\left\|\frac{u}{\|u\|_{M_1}}w\right\|_E\|u\|_{M_1}=\left\|\mathbf{A}_{\frac{u}{\|u\|_{M_1}}}w\right\|_E\|u\|_{M_1}\leqslant$$
$$\leqslant k\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi.$$

引理証毕.

从上述引理特別可推出下列結論：如果乘积 $u(x)v(x)w(x)$ 对任意三个函数 $u(x)\in L_{M_1}^*$, $v(x)\in L_{M_2}^*$, $w(x)\in L_{M_3}^*$ 可求和，則有不等式

$$\int_G u(x)v(x)w(x)dx\leqslant k\|u\|_{M_1}\|v\|_{M_2}\|w\|_{M_3}.$$

这个不等式是熟知的荷尔德不等式的推广：

$$\int_G u(x)v(x)w(x)dx\leqslant$$

---

1) 每一个定义在完全距离空間上的封閉可加齐次算子是連續的（例如見 [59] 47 頁).

$$\leqslant k\left(\int_G |u(x)|^{\alpha_1}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\left(\int_G |v(x)|^{\alpha_2}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}\left(\int_G |w(x)|^{\alpha_3}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_3}},$$

其中 $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\leqslant 1$.

此結論对任何有限多个因子的情形也正确.

容易看出,乘积 $u(x)w(x)$ 对任意的函数 $u(x)\in L^*_{M_1}$, $w(x)\in L^*_\Phi$ 可求和仅当 $\Psi(u)\prec M_1(u)$ 或者是 $N_1(u)\prec\Phi(u)$. 在这里,与通常的情形一样以 $\Psi(u)$, $N_1(u)$ 表示 $\Phi(u)$, $M_1(u)$ 的余 N-函数. 注意, 我們不可能选出这样的奥尔里奇空間使得所有的乘积 $u(x)w(x)$ 都属于該空間,假如 $\Phi(u)=N_1(u)$. 这可从下列定理推出.

定理 13.5. 設 $u(x)w(x)$ 对任意的一对函数 $u(x)\in L^*_{M_1}$, $w(x)\in L^*_\Phi$ 皆属于某一奥尔里奇空間 $L^*_{M_2}$,則 N-函数 $M_1(u)$ 的增加速度真快于 $\Psi(u)$,或者說成 $\Phi(u)$ 的增加速度真快于 $N_1(u)$.

証. 由于引理 13.3,只須証每一个 $L^*_{M_1}$ 內有界的函数集在空間 L^*_Ψ 中有等度的絕对連續范数.

設 T 是空間 $L^*_{M_1}$ 內半径为 r 的球. 由引理 13.5

$$\|uw\|_{M_2}\leqslant 2rk\quad(u(x)\in T,\ \rho(w;\Phi)\leqslant 1).$$

此时由瓦来-布桑定理可推出函数 $u(x)w(x)$ 有等度的絕对連續积分,即对每一个 $\varepsilon>0$ 相应的有 $\delta>0$,使得 $\left|\int_{G_1}u(x)w(x)dx\right|<\varepsilon$ 对所有測度小于 δ 的 $G_1\subset G$ 都成立. 最后的不等式表明从 $\mathrm{mes}\,G_1<\delta$ 可推得

$$\|u(x)\kappa(x;G_1)\|_\Psi=\sup_{\rho(w;\Phi)\leqslant 1}\left|\int_{G_1}u(x)w(x)dx\right|<\varepsilon.$$

定理証毕.

定理 13.6. 若对每一对函数 $u(x)\in L^*_{M_1}$, $w(x)\in L^*_\Phi$ 乘积 $u(x)w(x)$ 皆属于某一奥尔里奇空間 $L^*_{M_2}$,則 N-函数 $M_1(u)$ 和 $\Phi(u)$ 的增加速度真快于 N-函数 $M_2(u)$.

証. 譬如对函数 $M_1(u)$ 来証明定理的結論. 設 $G_1\subset G$, 而 $\kappa(x;G_1)$ 是集合 G_1 的特征函数. 因为 $\kappa(x;G_1)\in L^*_\Phi$, 所以

$u(x)\kappa(x;\ G_1)\in L^*_{M_2}$ 并且由引理 13.5

$$\|u(x)\kappa(x;\ G_1)\|_{M_2}\leqslant k\|u\|_{M_1}\|\kappa\|_\Phi.$$

設函数族 $u(x)\in L^*_{M_1}$ 的范数有界：$\|u\|_{M_1}\leqslant a$，則由前一不等式和公式(9.11)

$$\|u(x)\kappa(x;\ G_1)\|_{M_2}\leqslant ak\ \mathrm{mes}\ G_1\Psi^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{mes}\ G_1}\right),$$

因而推出

$$\lim_{\mathrm{mes}\ G_1\to 0}\|u\kappa\|_{M_2}=0,$$

卽函数 $u(x)$ 在 $L^*_{M_2}$ 中有等度的絕对連續范数.

定理証毕.

5. 充分条件. 現在給出两个函数 $u(x)\in L^*_{M_1}$, $w(x)\in L^*_\Phi$ 的乘积恆属于某个奥尔里奇空間 $L^*_{M_2}$ 的一些充分条件.

定理 13.7. 設存在两个互余的 N-函数 $R(u)$ 和 $Q(u)$，使得当 $u\geqslant u_0$ 时满足不等式

$$R(u)<M_2^{-1}[M_1(\alpha u)]\tag{13.15}$$

和

$$Q(u)<M_2^{-1}[\Phi(\beta u)],\tag{13.16}$$

其中 α, β 是某一常数，則对每一对函数 $u(x)\in L^*_{M_1}$, $w(x)\in L^*_\Phi$，乘积 $u(x)w(x)$ 皆属于 $L^*_{M_2}$.

証. 由(13.15)和(13.16)可知对自变量的一切值滿足不等式

$$M_2[R(u)]<M_2[R(u_0)]+M_1(\alpha u),\tag{13.17}$$

$$M_2[Q(u)]<M_2[Q(u_0)]+\Phi(\beta u).\tag{13.18}$$

設 $v(x)\in L_{N_2}$，則

$$\int_G u(x)w(x)v(x)dx=$$

$$=\alpha\beta\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi\int_G\frac{u(x)}{\alpha\|u\|_{M_1}}\frac{w(x)}{\beta\|w\|_\Phi}v(x)dx.$$

对后一积分利用两次楊格不等式得到

$$\left|\int_G u(x)w(x)v(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant \alpha\beta\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi\left\{\int_G M_2\left[R\left(\frac{u(x)}{\alpha\|u\|_{M_1}}\right)\right]dx + \right.$$

$$\left. + \int_G M_2\left[Q\left(\frac{w(x)}{\beta\|w\|_\Phi}\right)\right]dx + 2\int_G N_2[v(x)]dx\right\},$$

再由于(13.17)和(13.18)

$$\left|\int_G u(x)w(x)v(x)dx\right| \leqslant \alpha\beta\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi\left\{M_2[R(u_0)]\operatorname{mes} G + \right.$$

$$+ M_2[Q(u_0)]\operatorname{mes} G + \int_G M_1\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]dx +$$

$$\left. + \int_G \Phi\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx + 2\int_G N_2[v(x)]dx\right\} < \infty.$$

由此可見 $u(x)w(x) \in L^*_{M_2}$ 并且

$$\|uw\|_{M_2} = \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\left|\int_G u(x)w(x)v(x)dx\right| \leqslant k\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi, \tag{13.19}$$

其中

$$k = \alpha\beta(4 + \{M_2[R(u_0)] + M_2[Q(u_0)]\}\operatorname{mes} G).$$

定理証畢.

从这个定理特別可推出前面巳經引入过的結論，即当条件 $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \leqslant 1$ 滿足时乘积 $u(x)w(x)$ 属于一切 L^γ, 其中 $1 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$. 事实上，若 $M_1(u) = |u|^{\alpha_1}$, $\Phi(u) = |u|^{\alpha_2}$, $M_2(u) = |u|^{\gamma_0}$, 則 N-函数 $R(u) = M_2^{-1}[M_1(u)] = |u|^{\frac{\alpha_1}{\gamma_0}}$ 和 $Q(u) = M_2^{-1}[\Phi(u)] = |u|^{\frac{\alpha_2}{\gamma_0}}$ 是互余的，因为 $\frac{\gamma_0}{\alpha_1} + \frac{\gamma_0}{\alpha_2} = 1$.

今后我們有兴趣的情况是 N-函数 $M_1(u)$ 滿足 Δ_3-条件，而 $M_2(u) = N_1(u)$. 容易看出，在这种情况下定理 13.7 的結論成立，假如对 u 較大的値有不等式

$$N_1[N_1(u)] < \Phi(\beta u). \tag{13.20}$$

事实上，由定理 6.3 对 u 較大的値有

$$N_1[M_1(u)] < M_1(ku),$$

即

$$M_1(u) < N_1^{-1}[M_1(ku)].$$

置 $M_1(u)=R(u)$, $N_1(u)=Q(u)$, 則定理 13.7 的条件滿足.

同样容易看出，当 N-函数 $M_1(u)$ 滿足 Δ^2-条件，而 N-函数 $M_2(u)$ 滿足 Δ_2-条件,則定理 13.7 的結論成立,假如对自变量較大的值有不等式

$$M_2[N_1(u)]<\Phi(\beta u). \tag{13.21}$$

为証此,只須令 $R(u)=M_1(u)$, $Q(u)=N_1(u)$ 并且注意滿足 Δ_2-条件的 N-函数的增加速度慢于某个冪函数.

如果 N-函数 $M_2(u)$ 滿足 Δ'-条件,則可再給出下列的充分条件.

定理 13.8. 設 N-函数 $M_2(u)$ 滿足 Δ'-条件，又設当 $u\geqslant u_0$ 时滿足不等式

$$R(\alpha u)<M_1[M_2^{-1}(u)], \tag{13.22}$$

$$Q(\beta u)<\Phi[M_2^{-1}(u)], \tag{13.23}$$

其中 $R(u)$ 和 $Q(u)$ 是互余的 N-函数, α, β 为常数,則对每一对函数 $u(x)\in L^*_{M_1}$, $w(x)\in L^*_\Phi$, 乘积 $u(x)w(x)$ 皆属于 $L^*_{M_2}$.

証. 由(13.22)和(13.23)可知,对 u 的一切值滿足不等式

$$R[\alpha M_2(u)]<R(\alpha u_0)+M_1(u), \tag{13.24}$$

$$Q[\beta M_2(u)]<Q(\beta u_0)+\Phi(u). \tag{13.25}$$

因 N-函数 $M_2(u)$ 滿足 Δ'-条件, 故存在常数 a, a_1, b_1 和 C, 使对一切 u, w

$$M_2(uw)\leqslant a+a_1M_2(u)+b_1M_2(w)+CM_2(u)M_2(w). \tag{13.26}$$

設 $v(x)\in L_{N_2}$, 則

$$\int_G u(x)w(x)v(x)dx=\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi\int_G\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}v(x)dx.$$

对后一积分利用楊格不等式得到

$$\left|\int_G u(x)w(x)v(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi\left\{\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx+\int_G N_2[v(x)]dx\right\}.$$

由(13.26)

$$\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx \leqslant a \operatorname{mes} G + a_1\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]dx +$$

$$+ b_1\int_G M_2\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx + C\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]M_2\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx.$$

又从不等式(13.22)和(13.23)可推知对一切 u 有

$$M_2(u) < \alpha_1 + \frac{1}{\alpha}M_1(u)$$

和

$$M_2(u) < \beta_1 + \frac{1}{\beta}\Phi(u),$$

其中 α_1, β_1 是某一常数. 因此

$$\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx \leqslant a \operatorname{mes} G + \alpha_1 a_1 \operatorname{mes} G +$$

$$+ \frac{a_1}{\alpha}\int_G M_1\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]dx + \beta_1 b_1 \operatorname{mes} G +$$

$$+ \frac{b_1}{\beta}\int_G \Phi\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx + C\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]M_2\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant (a + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1) \operatorname{mes} G + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{b_1}{\beta} +$$

$$+ C\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]M_2\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx.$$

由杨格不等式以及不等式(13.24)和(13.25)

$$\int_G M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]M_2\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha\beta}\left\{\int_G R\left(\alpha M_2\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]\right)dx +\right.$$

$$\left.+ \int_G Q\left(\beta M_2\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]\right)dx\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha\beta}\left\{[R(\alpha u_0) + Q(\beta u_0)] \operatorname{mes} G +\right.$$

$$\left.+ \int_G M_1\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{M_1}}\right]dx + \int_G \Phi\left[\frac{w(x)}{\|w\|_\Phi}\right]dx\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha\beta}\{2 + [R(\alpha u_0) + Q(\beta u_0)]\operatorname{mes} G\}.$$

結合所得到的所有估計式便知对一切 $v(x) \in L_{N_2}$

$$\int_G u(x)w(x)v(x)dx < \infty$$

幷且

$$\|uw\|_{M_2} = \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1} \left|\int_G u(x)w(x)v(x)dx\right| \leqslant k\|u\|_{M_1}\|w\|_\Phi, \quad (13.27)$$

其中

$$k = \left\{1 + \frac{2C}{\alpha\beta} + \left[a + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 + \frac{C}{\alpha\beta}R(\alpha u_0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{C}{\alpha\beta}Q(\beta u_0)\right]\mathrm{mes}\, G + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{b_1}{\beta}\right\}.$$

定理証毕.

§14. 綫性泛函

1. L_M^* 上的綫性泛函. 設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数. 又設 $v(x)$ 是 L_N^* 內的某个确定的函数, 則从荷尔德不等式 (9.16) 可推出

$$l(u) = (u, v) = \int_G u(x)v(x)dx \quad (u(x) \in L_M^*) \quad (14.1)$$

是定义在整个空間 L_M^* 上的綫性泛函.

我們有不等式

$$\|l\| \leqslant \|v\|_N \leqslant 2\|l\|, \quad (14.2)$$

其中 $\|l\|$ 表示泛函 $l(u)$ 的范数:

$$\|l\| = \sup_{\|u\|_M\leqslant 1} |l(u)|.$$

(14.2)的左边不等式从荷尔德不等式可推出:

$$|l(u)| = |(u,v)| \leqslant \|u\|_M\|v\|_N.$$

又(14.2)的右边不等式从(9.12)可推出:

$$\|v\|_N = \sup_{\rho(u;M)\leqslant 1} |(u, v)| \leqslant \sup_{\|u\|_M\leqslant 2} |(u, v)| = 2\|l\|.$$

引入記号: $k(v) = \dfrac{\|v\|_N}{\|l\|}$. 此时不等式(14.2)可以改写成如下的形式

$$1 \leqslant k(v) \leqslant 2.$$

薩列霍夫 (Д. В. Салехов) 曾經詳細地研究过函数 $k(v)$，下面介紹它的最簡单的性質.

作为例子我們来計算函数 $k(v)$ 对由 N-函数 $M(u)=\frac{|u|^{\alpha}}{\alpha}$ $(\alpha>1)$ 所定义的奥尔里奇空間，即空間 L^{α} 的值.

我們記得对每一个函数 $u(x)\in L_M$

$$\|u\|_M=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\beta^{\frac{1}{\beta}}\left\{\int_G M[u(x)]dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}},$$

其中 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. 所以

$$\|l\|=\sup_{\|u\|_M\leq 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|=$$

$$=\sup_{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\beta^{\frac{1}{\beta}}\left\{\int_G M[u(x)]dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\leq 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|=$$

$$=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\beta^{\frac{1}{\beta}}}\sup_{\int_G M[u(x)]dx\leq 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|=\frac{\|v\|_N}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\beta^{\frac{1}{\beta}}},$$

于是

$$k(v)=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\beta^{\frac{1}{\beta}}\quad(v(x)\in L_N^*).$$

显然常量 $\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\beta^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\right)$ 可取得半閉区間 $(1,2]$ 中的任意值.

設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是任意的互余 N-函数，又設 G_1 是 G 的某个子集. 命 $v(x)=N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } G_1}\right)\kappa(x;G_1)$，其中 $\kappa(x;G_1)$ 是集合 G_1 的特征函数. 我們来証明

$$k(v)=\text{mes } G_1\, M^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } G_1}\right)N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes } G_1}\right). \qquad (14.3)$$

从特征函数的范数公式可推出 $\|v\|_N$ 等于公式(14.3)的右端，所以只須証明函数 $v(x)$ 所定义的綫性泛函(14.1)的范数等于 1.

因 $\rho(v;N)=1$，故

$$\|l\| = \sup_{\|u\|_M \leq 1} |(u, v)| \leq \sup_{\|u\|_M \leq 1} \left\{ \sup_{\rho(w; N) \leq 1} |(u, w)| \right\} = 1.$$

另一方面

$$\|l\| = \sup_{\|u\|_M \leq 1} |(u, v)| \geq \left(\frac{\kappa(x; G_1)}{\|\kappa(x; G_1)\|_M}, v \right) = 1.$$

换言之 $\|l\| = 1$，于是公式(14.3)获証.

由此可見，函数 $k(v)$ 的値域至少包含函数

$$f(\gamma) = \frac{M^{-1}(\gamma)N^{-1}(\gamma)}{\gamma} \quad \left(\frac{1}{\text{mes } G} < \gamma < \infty \right)$$

的値域.

薩列霍夫証明了 $f(\gamma) \equiv \text{const}$ 仅当 $M(u) = k|u|^{\alpha}(\alpha > 1)$. 这个結果表明函数 $k(v)$ 仅在空間 L^{α} 的情况下才能是常数.

现在对最簡单的情形，当

$$f(\gamma) \equiv 2 \quad \left(\gamma \geq \frac{1}{\text{mes } G} \right)$$

时来証明上述結論.

首先注意，从等式 $f(\gamma) \equiv c$ 可推出 N-函数 $M(u)$ 和 $N(u)$ 的右导数 $p(u)$ 和 $q(u)$ 的連續性. 事实上，从等式

$$M^{-1}(\gamma)N^{-1}(\gamma) = c\gamma \quad \left(\frac{1}{\text{mes } G} \leq \gamma < \infty \right)$$

可推出

$$\frac{M^{-1}(\gamma)}{q[N^{-1}(\gamma)]} + \frac{N^{-1}(\gamma)}{p[M^{-1}(\gamma)]} = c.$$

因为 $q(u)$ 和 $p(u)$ 在不連續点有正的跃度，故从上式可推知 $q(u)$ 和 $p(u)$ 連續.

今設 $f(\gamma) = 2$，卽 $M^{-1}(\gamma)N^{-1}(\gamma) = 2\gamma$. 由楊格不等式恆有

$$M^{-1}(\gamma)N^{-1}(\gamma) \leq 2\gamma.$$

因此在楊格不等式中达到了等号. 又由 $p(u)$ 和 $q(u)$ 的連續性可知，等号被达到必須 $M^{-1}(\gamma) = q[N^{-1}(\gamma)]$ 或者是 $N^{-1}(\gamma) = = p[M^{-1}(\gamma)]$.

利用最后的等式和关系式 $M^{-1}(\gamma)N^{-1}(\gamma)=2\gamma$ 便知，对一切 $\gamma\geqslant\frac{1}{\text{mes }G}$ 有

$$\frac{2\gamma}{M^{-1}(\gamma)p[M^{-1}(\gamma)]}=1.$$

置 $M^{-1}(\gamma)=u$，则当 $u\geqslant u_0=M^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes }G}\right)$ 时

$$\frac{p(u)}{M(u)}=\frac{2}{u}.$$

从 u_0 到 $|u|$ 积分前一等式得到

$$M(u)=\frac{M(u_0)}{u_0^2}|u|^2\quad(u\geqslant u_0).$$

从 (14.2) 立即推出空間 L_N^* 可看成是 L_M^* 的泛函空間的綫性子集并且空間 L_N^* 的范数与作为泛函空間的子集所誘导出的范数等价. 因为空間 L_N^* 按奥尔里奇范数完备，所以它在泛函空間內构成閉子空間. 一般的說，L_N^* 与 L_M^* 上的泛函空間并不重合，因为有如下的定理.

定理 14.1. 設 N-函数 $M(u)$ 不滿足 Δ_2-条件，則(14.1)不是 L_M^* 上綫性泛函的一般表达式.

証. 設 E_M 是有界函数的集合在 L_M^* 中的閉包所构成的綫性子空間，則由(10.1)可知 E_M 是 L_M^* 的眞子集. 設 $u_0(x)\in L_M^*\setminus E_M$，今定义 L_M^* 上的綫性泛函 $\boldsymbol{l}(u)$. 命 $\boldsymbol{l}(u_0)=1$ 并且 $\boldsymbol{l}(u)=0$ 当 $u(x)\in E_M$ 时，然后根据汉恩-巴拿哈定理保持范数地扩张到整个 L_M^*.

假定此泛函 $\boldsymbol{l}(u)$ 可以表成

$$\boldsymbol{l}(u)=\int_G u(x)v(x)dx\quad(u(x)\in L_M^*)$$

的形式，其中 $v(x)$ 是某一函数.

作有界函数列

$$v_n(x)=\begin{cases}v(x), & \text{当 } |v(x)|\leqslant n\quad(n=1,2,\cdots)\text{ 时},\\ 0, & \text{当 } |v(x)|>n\quad(n=1,2,\cdots)\text{ 时}.\end{cases}$$

根据泛函 $\boldsymbol{l}(u)$ 的作法

$$\int_G v_n(x)v(x)dx = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

因而推出函数 $v(x)$ 几乎处处等于零，此时 $\boldsymbol{l}(u_0)=0$，这和 $\boldsymbol{l}(u_0)=1$ 发生矛盾.

定理証毕.

2. E_M 上綫性泛函的一般表达式.

定理 14.2. 公式(14.1)，其中 $v(x)\in L_N^*$，給出了 E_M 上綫性泛函的一般表达式.

証. 我們利用通常对类似定理的討論方法来进行本定理的証明.

設 $\boldsymbol{l}(u)$ 是定义在 E_M 上的綫性泛函. 我們来定义集合 G 的一切可测子集 $\mathscr{E}$ 的全体上的集合函数 $F(\mathscr{E})$:

$$F(\mathscr{E}) = \boldsymbol{l}[\kappa(x;\mathscr{E})],$$

其中 $\kappa(x;\mathscr{E})$ 是集合 $\mathscr{E}$ 的特征函数.

可加函数 $F(\mathscr{E})$ 是絕对連續的，因为由(9.11)

$$|F(\mathscr{E})| = |\boldsymbol{l}[\kappa(x;\mathscr{E})]| \leqslant \|\boldsymbol{l}\| \operatorname{mes}\mathscr{E} N^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes}\mathscr{E}}\right);$$

从而

$$\lim_{\operatorname{mes}\mathscr{E}\to 0} |F(\mathscr{E})| = 0.$$

由拉东-尼可丁定理[5]，函数 $F(\mathscr{E})$ 可以表成下列的形式:

$$F(\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} v(x)dx, \tag{14.4}$$

其中 $v(x)$ 是 G 上可求和的函数.

从(14.4)可推出对每一个有限值的可测函数 $u(x)$ 有等式

$$\boldsymbol{l}(u) = \int_G u(x)v(x)dx. \tag{14.5}$$

設 $u(x)$ 是 L_M 內的任意函数，則可选出有限值的函数列 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 几乎处处收斂于 $u(x)$ 幷且 $|u_n(x)|\leqslant|u(x)|$ 几乎处处成立. 从而函数列 $|u_n(x)v(x)|$ 几乎处处收斂于 $|u(x)v(x)|$ 幷且 $\|u_n\|_M \leqslant \|u\|_M$. 再由法都定理和(14.5)

$$\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \leqslant \sup_n \left\{\int_G |u_n(x)v(x)|dx\right\} =$$

$$= \sup_n |\boldsymbol{l}(|u_n(x)|\operatorname{sign} v(x))| \leqslant$$

$$\leqslant \|\boldsymbol{l}\| \sup_n \|u_n\|_M \leqslant \|\boldsymbol{l}\| \|u\|_M < \infty.$$

換言之 $v(x) \in L_N^*$.

以 $\boldsymbol{l}_1(u)$ 表示定义在 L_M^* 上的泛函：

$$\boldsymbol{l}_1(u) = \int_G u(x)v(x)dx.$$

由 (14.5) 連續綫性泛函 $\boldsymbol{l}(u)$ 和 $\boldsymbol{l}_1(u)$ 在稠密于 E_M 内的有限值函数的集合上取得相同的值． 換言之，它們在整个 E_M 上取得相同的值，即公式(14.5)对一切函数 $u(x) \in E_M$ 成立．

又易見不同的函数 $v(x) \in L_N^*$ 产生 E_M 上不同的泛函．

定理証毕．

泛函(14.1)仅考虑在 E_M 上的范数，暂时記为 $\|\boldsymbol{l}\|_1$． 对每一个 $\varepsilon > 0$ 可找到函数 $u(x) \in L_M^*$, $\|u\|_M = 1$ 使得

$$\int_G u(x)v(x)dx \geqslant \|\boldsymbol{l}\| - \varepsilon.$$

命

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{当 } |u(x)| \leqslant n \\ 0, & \text{当 } |u(x)| > n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

显然 $\|u_n\|_M \leqslant \|u\|_M$ 并且 $u_n(x) \in E_M$． 从积分的絕对連續性可推知，当 n 充分大时

$$\int_G u_n(x)v(x)dx \geqslant \int_G u(x)v(x)dx - \varepsilon.$$

于是

$$\|\boldsymbol{l}\|_1 \geqslant \|u_n\|_M \|\boldsymbol{l}\|_1 \geqslant \int_G u_n(x)v(x)dx \geqslant \|\boldsymbol{l}\| - 2\varepsilon.$$

从所得到的不等式和明显的关系式 $\|\boldsymbol{l}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{l}\|$ 即可推出 $\|\boldsymbol{l}\|_1 = \|\boldsymbol{l}\|$，即

$$\|\boldsymbol{l}\|_1 = \sup_{\substack{\|u\|_M \leqslant 1 \\ u \in E_M}} |\boldsymbol{l}(u)|. \tag{14.6}$$

上面所得到的等式使我們可以利用同一个符号 $\|\boldsymbol{l}\|$ 来表示泛函(14.1)考虑在整个 L_M^* 上,以及仅考虑在 E_M 上的情形.

若 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件,則 E_M 与 $L_M^*=L_M$ 重合,此时公式(14.1)給出 L_M^* 上綫性泛函的一般表达式.

3. E_N-弱收斂性. 我們称函数列 $u_n(x)\in L_M^*(n=1,2,\cdots)$ E_N-弱收斂,假如对每一个函数 $v(x)\in E_N$,数列

$$\boldsymbol{l}(u_n)=\int_G u_n(x)v(x)dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

收斂.上面引入的定义与通常的不同,因为一般說来函数 $v(x)\in E_N$ 并不能确定 L_M^* 上的一切綫性泛函. 这个定义与通常的一致,假如 N-函数 $M(u)$ 和 $N(v)$ 都滿足 Δ_2-条件.

如果在空間 E_M 內考虑弱收斂性,則这里引入的定义与通常的一致,假如 N-函数 $N(v)$ 滿足 Δ_2-条件.

在一般情况下空間 L_M^* 內的这种弱收斂性——E_N-弱收斂性,可看成是 E_N 上的泛函空間內的弱收斂性.事实上,我們已經証明了該泛函空間的元素和 L_M^* 的元素之間存在着綫性的一一对应,并且相应元素的范数等价,于是每一个 L_M^* 內 E_N-弱收斂的元素列对应 E_N 上弱收斂的綫性泛函列.

因此从一些普遍的定理(譬如参看[35]193—196頁)就可以推出如下的結論.

定理 14.3. 若函数列 $u_n(x)\in L_M^*(n=1,2,\cdots)E_N$-弱收斂,則范数 $\|u_n\|_M(n=1,2,\cdots)$ 一致有界.

定理 14.4. 每一个空間 L_M^* 在下列意义下 E_N-弱完备,即对每一个 E_N-弱收斂的函数列 $u_n(x)\in L_M^*(n=1,2,\cdots)$ 可以选出唯一的函数 $u(x)\in L_M^*$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_G u_n(x)v(x)dx=\int_G u(x)v(x)dx \quad (v(x)\in E_N).$$

每一个空間 $L_M^*E_N$-弱列紧,即从每一个有界叙列可以选出 E_N-弱收斂的子叙列.

注意空間 E_M 在 L_M^* 內的 E_N-弱閉包是整个空間 L_M^*. 这可从下列事实推出,即对每一个函数 $u(x)\in L_M^*$,有界函数列

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{当 } |u(x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{当 } |u(x)| > n \end{cases}$$

E_N-弱收斂于 $u(x)$，而这又是因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_G [u(x) - u_n(x)]v(x)dx = 0$$

对一切 $v(x) \in E_N$（甚至对一切 $v(x) \in L_N^*$）成立.

我們已經証明（見 87 頁）函数 $u_n(x)$ 的范数也收斂于 $\|u\|_M$. 由此可見，函数列 $u_n(x)$ 几乎处处收斂于 $u(x)$，E_N-弱收斂于 $u(x)$ 并且 $\|u_n\|_M \to \|u\|_M$. 不过一般說来 $u_n(x)$ 并不按范数收斂于 $u(x)$.

每一个按 L_M^* 范数收斂的函数列显然也是 E_N-弱收斂的. 其逆不眞. 今后将会用到下列明显的結論.

定理 14.5. 若函数列 $u_n(x) \in L_M^*(n = 1, 2, \cdots)$ E_N-弱收斂并且在 L_M^* 的范数收斂意义下列紧，則它按范数收斂.

有时应用下列 E_N-弱收斂性的判别法比較方便.

定理 14.6. 設函数列 $u_n(x) \in L_M^*(n = 1, 2, \cdots)$ 依測度收斂于函数 $u(x)$ 并且范数 $\|u_n\|_M$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 一致有界，則 $u(x) \in L_M^*$ 同时 $u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ E_N-弱收斂于 $u(x)$.

証. 由于 L_M^* 内球的 E_N-弱列紧性，每一个 L_M^* 内按范数有界的函数列包含有 E_N-弱收斂的子叙列. 因此只須証明对任何在 L_M^* 中 E_N-弱收斂于 $u_0(x) \in L_M^*$ 的子叙列 $u_{n_k}(x)$ 恆有 $u_0(x) = u(x)$.

以 $\kappa_m(x)$ 表示某一确定的点集，在其上

$$|u(x) - u_0(x)| \leqslant m$$

的特征函数，又以 $v_0(x)$ 表示函数 $\operatorname{sign}[u(x) - u_0(x)]$.

假設給定 $\varepsilon > 0$. 因为由瓦来-布桑定理（見 90 頁）函数 $u_0(x)$, $u_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 有等度的絕对連續积分，所以存在 $\delta > 0$ 使当 $\operatorname{mes}\mathscr{E} < \delta(\mathscr{E} \subset G)$ 时

$$\int_{\mathscr{E}} |u_0(x)|dx < \frac{\varepsilon}{5},\quad \int_{\mathscr{E}} |u_{n_k}(x)|dx < \frac{\varepsilon}{5}\quad (k = 1, 2, \cdots).$$

我們将認为 $\delta < \frac{\varepsilon}{5m}$. 从子叙列 $u_{n_k}(x)$ 依測度收斂于 $u(x)$ 并且 E_N-弱收斂于 $u_0(x)$ 可推出存在常数 k_0, 使当 $k > k_0$ 时

$$\int_G [u_{n_k}(x) - u_0(x)] v_0(x) \kappa_m(x) dx < \frac{\varepsilon}{5}$$

并且 $\operatorname{mes} G_k < \delta$, 其中 $G_k = G\left(|u_{n_k}(x) - u(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{5 \operatorname{mes} G}\right)$.

于是当 $k > k_0$ 时

$$\int_G |u(x) - u_0(x)| \kappa_m(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_G [u_{n_k}(x) - u_0(x)] v_0(x) \kappa_m(x) dx\right| +$$

$$+ \int_{G \setminus G_k} |u(x) - u_{n_k}(x)| dx + \int_{G_k} |u_{n_k}(x)| dx +$$

$$+ \int_{G_k} |u_0(x)| dx + \int_{G_k} |u(x) - u_0(x)| \kappa_m(x) dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5 \operatorname{mes} G} \operatorname{mes}(G \setminus G_k) + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + m \operatorname{mes} G_k < \varepsilon.$$

因 ε 是任意的,故

$$\int_G |u(x) - u_0(x)| \kappa_m(x) dx = 0,$$

即 $u_0(x) = u(x)$ 几乎处处成立.

定理証毕.

4. E_N-弱連續的綫性泛函. 我們称綫性泛函 $l(u)$ 在 L_M^* 上 *E_N-弱連續*, 假如对每一个 E_N-弱收斂于元素 $u_0(x) \in L_M^*$ 的叙列 $u_n(x) \in L_M^*(n = 1, 2, \cdots)$ 恆有等式

$$\lim_{n \to \infty} l(u_n) = l(u_0).$$

由定义立即可推出形如(14.1)的泛函,其中 $v(x) \in E_N$ 是 E_N-弱連續的. 其逆亦眞,亦即有

定理 14.7. *每一个 L_M^* 上的 E_N-弱連續綫性泛函可表成 (14.1) 的形式,其中 $v(x) \in E_N$.*

証. 考慮空間 E_N 的共軛空間 $\bar{E}_N$. 由 E_N 上綫性泛函的一

般表达式（定理 14.2）可知，泛函 $\boldsymbol{f} \in \bar{E}_N$ 和函数 $u(x) \in L_M^*$ 之間存在一一对应，并且这个对应由下列公式确定：

$$\boldsymbol{f}(v) = \int_G v(x)u(x)dx \quad (u(x) \in L_M^*,\ v(x) \in E_N). \quad (14.7)$$

此时由 E_N-弱收斂性的定义又知，E_N-弱收斂于函数 $u(x) \in L_M^*$ 的函数列 $u_n(x) \in L_M^*$，一一对应于弱收斂于泛函

$$\boldsymbol{f}(v) = \int_G v(x)u(x)dx$$

的泛函列

$$\boldsymbol{f}_n(v) = \int_G v(x)u_n(x)dx.$$

設 $\boldsymbol{l}_0(u)$ 是空間 L_M^* 上某一 E_N-弱連續泛函，我們以下列等式来确定空間 $\bar{E}_N$ 上的泛函 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{f} \in \bar{E}_N)$：

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{l}_0(u), \quad (14.8)$$

其中 $u(x) \in L_M^*$ 是泛函 $\boldsymbol{f}$ 通过 E_N 上的泛函和空間 L_M^* 內的函数之間的一一对应关系所确定的函数.

显然，从 L_M^* 上泛函 $\boldsymbol{l}_0(u)$ 的 E_N-弱連續性可推出 $\bar{E}_N$ 上泛函 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f})$ 的弱連續性. 因为空間 E_N 可分，則由关于共軛空間內弱連續泛函的一般表达式的巴拿哈定理[1)]，存在函数 $v_0(x) \in E_N$ 使得

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(v_0)$$

对一切 $\boldsymbol{f} \in \bar{E}_N$ 成立，卽

$$\boldsymbol{l}_0(u) = \int_G v_0(x)u(x)dx$$

对一切 $u(x) \in L_M^*$ 成立.

定理証毕.

5. 泛函的范数和 $\|v\|_{(N)}$. 若在空間 L_M^* 內考虑刘克施姆布洛格范数 $\|u\|_{(M)}$（見 § 9 第 7 段），則每一个具有积分表达式(14.1)的綫性泛函 $\boldsymbol{l}(u)$ 的范数可由下面的等式确定：

---

1) 該巴拿哈定理(参看[3])的內容为：假如 E 是可分空間，而 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f})$ 是它的共軛空間 $\bar{E}$ 上的弱連續泛函，則存在元素 $v_0 \in E$ 使得

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(v_0)$$

对一切 $\boldsymbol{f} \in \bar{E}$ 成立.

$$\|\boldsymbol{l}\|_{(M)} = \sup_{\|u\|_{(M)}\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|,$$

再由(9.25)

$$\|\boldsymbol{l}\|_{(M)} = \|v\|_N.$$

我們还有下列等式:

$$\|\boldsymbol{l}\| = \|v\|_{(N)}, \tag{14.9}$$

其中 $\|\boldsymbol{l}\|$ 表示泛函(14.1)通常的范数. 显然这个等式相当于等式

$$\|v\|_{(N)} = \sup_{\|u\|_M\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|. \tag{14.10}$$

为了証明(14.10),注意,从(9.26)可推得不等式

$$\sup_{\|u\|_M\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \leqslant \|v\|_{(N)}.$$

这样一来我們就只須証明

$$\sup_{\|u\|_M\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right| \geqslant \|v\|_{(N)}. \tag{14.11}$$

以 T 表示单位球 $\|v\|_{(N)} \leqslant 1$, 并把它考虑成 G 上可求和函数的空間 L_1 的子集.

凸集 T 按 L_1 的范数是封閉的,因为从

$$\lim_{n\to\infty}\int_G |v_n(x) - w(x)|dx = 0 \quad (v_n(x) \in T)$$

可推出 $v_n(x)$ 依測度收斂于 $w(x)$,从而由法都定理和(9.21)

$$\int_G N[w(x)]dx \leqslant \sup_n \int_G N[v_n(x)]dx \leqslant 1.$$

設 $v_0(x)$ 是空間 L_N^* 內某个确定的非零函数. 显然,函数

$$(1+\varepsilon)\frac{v_0(x)}{\|v_0\|_{(N)}} \overline{\in} T, \quad \text{其中 } \varepsilon > 0.$$

如所周知,我們可以作出定义在 L_1 上的綫性泛函 $\boldsymbol{f}(v)$ 使得

$$\boldsymbol{f}\left[(1+\varepsilon)\frac{v_0(x)}{\|v_0\|_{(N)}}\right] > \boldsymbol{f}(v) \quad (v(x) \in T)^{[3]}. \tag{14.12}$$

因 $\boldsymbol{f}(v)$ 允許有积分表达式:

$$\boldsymbol{f}(v) = \int_G v(x)h(x)dx \quad (v(x) \in L_1)^{[2]},$$

其中 $h(x)$ 是某个殆遍有界的函数，故从(14.12)可推出

$$\frac{1+\varepsilon}{\|v_0\|_{(N)}}\int_G v_0(x)h(x)dx \geqslant \sup_{v\in T}\int_G v(x)h(x)dx =$$

$$= \sup_{\|v\|_{(N)}\leqslant 1}\int_G |v(x)||h(x)|dx,$$

再由(9.25)

$$\frac{1+\varepsilon}{\|v_0\|_{(N)}}\int_G v_0(x)h(x)dx \geqslant \|h\|_M.$$

因而

$$(1+\varepsilon)\int_G v_0(x)\frac{h(x)}{\|h\|_M}dx \geqslant \|v_0\|_{(N)},$$

于是由 ε 的任意性

$$\int_G v_0(x)\frac{h(x)}{\|h\|_M}dx \geqslant \|v_0\|_{(N)}.$$

从上述不等式即可推出(14.11)成立。

第三章　奥尔里奇空間内的算子

§ 15. 綫性积分算子連續性的条件

1. 問題的提出.　本章研究映一个奥尔里奇空間 $L^*_{M_1}$ 到另一个奥尔里奇空間 $L^*_{M_2}$ 内的綫性算子 $\mathbf{A}$. 我們以 $\{B_1 \to B_2\}$ 表示映空間 B_1 到空間 B_2 内的綫性算子的类,又以 $\{B_1 \to B_2;\ \text{н.}\}$ 表示連續算子的类,而全連續算子的类則記作 $\{B_1 \to B_2;\ \text{вп. н.}\}$.

我們的主要兴趣在于研究形如

$$\mathbf{A}u(x) = \int_G k(x, y)u(y)dy \tag{15.1}$$

的积分算子.

本节的基本問題在于闡明算子(15.1)映 $L^*_{M_1}$ 到 $L^*_{M_2}$ 内連續的条件,即滿足条件

$$\|\mathbf{A}u\|_{M_2} \leqslant \|\mathbf{A}\|\|u\|_{M_1},$$

其中 $\|\mathbf{A}\|$ 是某一常数.

我們将对各种不同特征的核 $k(x, y)$ 找出算子 $\mathbf{A}$ 連續性的条件.这种特征中最方便的一种是核属于某一奥尔里奇空間,即积分

$$\int_G\int_G \Psi[\alpha k(x, y)]dx\,dy$$

对某个 α 是有限的.

下面以 $\hat{G}$ 表示引进乘积测度的拓朴积 $G \times G$, 又以 $\hat{L}_M$, $\hat{L}^*_M$, $\hat{E}_M$ 分别代表相应的类和空間 $L_M(\hat{G})$, $L^*_M(\hat{G})$ 和 $E_M(\hat{G})$.

2. 一般定理.　犹如寻常, 以 $N_1(v)$, $N_2(v)$ 表示給定的 N-函数 $M_1(u)$, $M_2(u)$ 的余 N-函数.

定理 15.1.　設 $\Phi(u)$ 是这样的 N-函数, 使当 $u(x) \in L^*_{M_1}$, $v(x) \in L^*_{N_2}$ 时

$$w(x, y) = u(y)v(x) \in \hat{L}^*_{\Phi} \tag{15.2}$$

并且

$$\|w(x, y)\|_{\hat{\Phi}} \leqslant l\|u\|_{M_1}\|v\|_{N_2}, \tag{15.3}$$

其中 l 是某个常数. 又設綫性积分算子 (15.1) 的核属于空間 $\hat{L}^*_{\Psi}$, 其中 $\Psi(v)$ 是 N-函数 $\Phi(u)$ 的余 N-函数. 則算子 (15.1) 属于 $\{L^*_{M_1} \to L^*_{M_2}; \text{н.}\}$.

証. 由荷尔德不等式和(15.3), 当 $u(x) \in L^*_{M_1}$, $v(x) \in L_{N_2}$ 时

$$\int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx = \int_G\int_G k(x, y)u(y)v(x)dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}}\|w(x, y)\|_{\hat{\Phi}} \leqslant l\|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}}\|v\|_{N_2}\|u\|_{M_1}, \tag{15.4}$$

因而推出算子 $\mathbf{A}$ 映 $L^*_{M_1}$ 到 $L^*_{M_2}$ 內.

因为当 $\rho(v; N_2) \leqslant 1$ 时 $\|v\|_{N_2} \leqslant 2$, 則从(15.4)可推出

$$\|\mathbf{A}u\|_{M_2} = \sup_{\rho(v; N_2)\leqslant 1}\left|\int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2l\|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}}\|u\|_{M_1}. \tag{15.5}$$

由此可見, 算子 $\mathbf{A}$ 有界, 因而連續.

定理証毕.

从不等式(15.5)可得到算子 $\mathbf{A}$ 范数的估計式:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|u\|_{M_1}\leqslant 1}\|\mathbf{A}u\|_{M_2} \leqslant 2l\|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}}. \tag{15.6}$$

当然这个估計式是偏高的, 它在許多情况下可以改善. 改进算子 $\mathbf{A}$ 范数的估計式的方法中, 有一种是可以建立在应用加強荷尔德不等式的基础之上的.

3. 函数 $\Phi(u)$ 的存在. 应用定理 15.1 就要求我們通晓滿足条件(15.2)和(15.3)的函数 $\Phi(u)$.

引理 15.1. 設 $\Phi(u)$ 定义为 N-函数

$$\Psi(v) = M_2[N_1(v)] \tag{15.7}$$

的余 N-函数, 則它滿足条件(15.2)和(15.3).

証. 設 $u(x) \in L^*_{M_1}$, $v(x) \in L^*_{N_2}$. 先証滿足条件(15.2), 即函数 $w(x, y) = u(y)v(x)$ 属于空間 $\hat{L}^*_{\Phi}$.

設 $g(x, y) \in \hat{L}^*_{\Psi}$, 則

$$\left|\iint_{\hat{G}} w(x, y) g(x, y) dx\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2} \iint_{\hat{G}} |g(x, y)| \frac{|u(y)|}{\|u\|_{M_1}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx\, dy.$$

应用楊格不等式(2.6)于上式右端积分号下的前两个因子，便知

$$\left|\iint_{\hat{G}} w(x, y) g(x, y) dx\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2} \left\{\iint_{\hat{G}} N_1[g(x,y)] \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx\, dy\right\} +$$

$$+ \iint_{\hat{G}} M_1\left[\frac{u(y)}{\|u\|_{M_1}}\right] \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx\, dy,$$

再应用楊格不等式于花括弧中的第一項得到

$$\left|\iint_{\hat{G}} w(x, y) g(x, y) dx\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2} \left\{\iint_{\hat{G}} M_2[N_1[g(x, y)]] dx\, dy +\right.$$

$$+ \iint_{\hat{G}} N_2\left[\frac{v(x)}{\|v\|_{N_2}}\right] dx\, dy + \int_G M_1\left[\frac{u(y)}{\|u\|_{M_1}}\right] dy \times$$

$$\left.\times \int_G \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx\right\}. \tag{15.8}$$

因为

$$\int_G N_2\left[\frac{v(x)}{\|v\|_{N_2}}\right] dx \leqslant 1, \int_G M_1\left[\frac{u(y)}{\|u\|_{M_1}}\right] dy \leqslant 1,$$

而函数 $v(x)$ 可积，则从(15.8)可推得

$$\left|\iint_{\hat{G}} w(x, y) g(x, y) dx\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2} \left\{\iint_{\hat{G}} \Psi[g(x, y)] dx\, dy + \text{mes}\, G +\right.$$

$$\left.+ \int_G \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx\right\}, \tag{15.9}$$

因而推出(15.2).

因为由楊格不等式

$$\int_G \frac{|v(x)|}{\|v\|_{N_2}} dx \leqslant \int_G N_2\left[\frac{v(x)}{\|v\|_{N_2}}\right] dx + M_2(1) \operatorname{mes} G \leqslant$$
$$\leqslant 1 + M_2(1) \operatorname{mes} G,$$

所以若 $\rho(g(x, y), \Psi) \leqslant 1$, 則从(15.9)可推出

$$\|w(x, y)\|_{\hat{\Phi}} = \sup_{\rho(g;\Psi)\leqslant 1} \left|\iint_{\hat{G}} w(x, y) g(x, y) dx\, dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant l \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_2},$$

其中

$$l = 2 + \operatorname{mes} G + M_2(1) \operatorname{mes} G. \tag{15.10}$$

引理証毕.

相似地可以証明

引理 15.2. 設 $\Phi(u)$ 定义为 N-函数

$$\Psi(v) = N_1[M_2(v)] \tag{15.11}$$

的余 N-函数,則它满足条件(15.2)和(15.3).

在引理 15.2 中,常数 l 由下式确定:

$$l = 2 + \operatorname{mes} G + N_1(1) \operatorname{mes} G. \tag{15.12}$$

4. 满足 Δ'-条件的 N-函数的一个性质. 在綫性积分算子的研究中, 从 $u(x)$, $v(x) \in L_M^*$ 可推出 $u(y)v(x) \in \hat{L}_M^*$ 的 N-函数 $M(u)$ 起着重要的作用. 本段我們要来闡明怎样的 N-函数具有这种性質. 显然, N-函数 $M(u) = k|u|^\alpha (\alpha > 1)$ 就具有所述的性質.

引理 15.3. 如果从 $u(x)$, $v(x) \in L_M^*$ 可推出函数 $w(x, y) = u(y)v(x) \in \hat{L}_M^*$, 則 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件.

証. 假定 N-函数 $M(u)$ 不满足 Δ_2-条件,則可找到单調上升的无界数列 u_n 使得

$$M(2u_n) > 2^{2n} M(2^n) M(u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{15.13}$$

作互不相交的集合 $G_n \subset G$ 满足

$$\operatorname{mes} G_n = \frac{M(2) \operatorname{mes} G}{2^n M(2^n)} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

和互不相交的集合 $\mathscr{E}_n \subset G$ 满足

$$\text{mes}\,\mathscr{E}_n = \frac{M(u_1)\text{mes}\,G}{2^n M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

置

$$v(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{若 } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ 0, & \text{若 } x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \end{cases}$$

和

$$u(x) = \begin{cases} u_n, & \text{若 } x \in \mathscr{E}_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ 0, & \text{若 } x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n. \end{cases}$$

则

$$\int_G M[v(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} M[v(x)]dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M(2^n)\text{mes}\,G_n = M(2)\text{mes}\,G < \infty,$$

$$\int_G M[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathscr{E}_n} M[u(x)]dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n)\text{mes}\,\mathscr{E}_n = M(u_1)\text{mes}\,G < \infty.$$

另一方面,对足够大的 k 有

$$\iint\limits_{\hat{G}} M\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right] dx\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{G_i} \int_{\mathscr{E}_j} M\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right] dx\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{2^i u_j}{k}\right) \text{mes}\,G_i\,\text{mes}\,\mathscr{E}_j \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{2^n u_n}{k}\right) \text{mes}\,G_n\,\text{mes}\,\mathscr{E}_n \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=m}^{\infty} M(2u_n)\frac{M(2)M(u_1)(\text{mes}G)^2}{2^{2n}M(2^n)M(u_n)},$$

其中 $2^{m-1}>k$. 因而由(15.13)得到

$$\iint_{\hat{G}} M\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right]dx\,dy=\infty.$$

由此可見，$u(x)$, $v(x)\in L_M^*$, 而 $u(y)v(x)\bar{\in}\hat{L}_M^*$.

引理証毕.

定理 15.2. 对任意一对函数 $u(x)$, $v(x)\in L_M^*$,乘积 $w(x, y)=u(y)v(x)$ 恆属于空間 $\hat{L}_M^*$ 的充要条件为 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ'-条件.

充分性的証明. 設 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ'-条件，即存在正常数 u_0 和 C 使得

$$M(uv)\leqslant CM(u)M(v)\quad (u,\ v\geqslant u_0), \tag{15.14}$$

則由引理 5.1, $M(u)$ 满足 Δ_2-条件，故 $L_M^*=L_M$.

設 $u(x)$, $v(x)\in L_M$. 以 G_u(相应的 G_v)表示集合 $G\{|u(x)|\geqslant u_0\}$ (相应的 $G\{|v(x)|\geqslant u_0\}$), 其中 u_0 是条件 (15.14) 所确定的数. 則当 $x\in G_v$, $y\in G_u$ 时恆有

$$M[u(y)v(x)]\leqslant CM[u(y)]M[v(x)].$$

从这个不等式和明显的等式

$$\begin{aligned}\iint_{\hat{G}} M[u(y)v(x)]dx\,dy= \\ =\int_{G_u}\int_{G_v} M[u(y)v(x)]dx\,dy+ \\ +\int_{G\setminus G_u}\int_{G_v} M[u(y)v(x)]dx\,dy+ \\ +\int_{G_u}\int_{G\setminus G_v} M[u(y)v(x)]dx\,dy+ \\ +\int_{G\setminus G_u}\int_{G\setminus G_v} M[u(y)v(x)]dx\,dy\end{aligned}$$

即可推出

$$\iint_G M[u(y)v(x)]dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\int_G M[u(y)]dy\int_G M[v(x)]dx +$$

$$+ \text{mes}\, G\int_G M[u_0 v(x)]dx +$$

$$+ \text{mes}\, G\int_G M[u_0 u(y)]dy + M(u_0^2)(\text{mes}\, G)^2, \qquad (15.15)$$

又因 $u_0 v(x)$, $u_0 u(x) \in L_M$, 故得 $u(y)v(x) \in \hat{L}_M = \hat{L}_M^*$.

必要性的証明. 設函数 $w(x, y) = u(y)v(x) \in \hat{L}_M^*$, 当 $u(x)$, $v(x) \in L_M^*$ 时, 則由引理 15.3 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件, 故 $\hat{L}_M^* = \hat{L}_M$.

假定 N-函数 $M(u)$ 不滿足 Δ'-条件, 則可找到单調上升的无界正数列 u_n, $v_n (n = 1, 2, \cdots)$ 使得

$$M(u_n v_n) > 2^{2n} M(u_n) M(v_n) \quad (n = 1, 2, \cdots). \quad (15.16)$$

作集合 $G_n \subset G$ 和 $\mathscr{E}_n \subset G$ 使得

$$\text{mes}\, G_n = \frac{M(u_1)\text{mes}\, G}{2^n M(u_n)}, \quad \text{mes}\, \mathscr{E}_n = \frac{M(v_1)\text{mes}\, G}{2^n M(v_n)}$$
$$(n = 1, 2, \cdots)$$

并且 $G_i \cap G_j = 0$, $\mathscr{E}_i \cap \mathscr{E}_j = 0 (i \neq j)$.

置

$$u(x) = \begin{cases} u_n, & 若\ x \in G_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ 0, & 若\ x \bar{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \end{cases}$$

和

$$v(x) = \begin{cases} v_n, & 若\ x \in \mathscr{E}_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ 0, & 若\ x \bar{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n. \end{cases}$$

則

$$\int_G M[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n} M[u(x)]dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n)\text{mes}\, G_n = M(u_1)\text{mes}\, G < \infty,$$

$$\int_G M[v(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}_n} M[v(x)]dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M(v_n)\text{mes}\,\mathscr{E}_n = M(v_1)\text{mes}\,G < \infty.$$

另一方面

$$\iint_{\hat{G}} M[u(y)v(x)]dx\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{G_i}\int_{\mathscr{E}_j} M[u(y)v(x)]dx\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} M(u_i v_j)\text{mes}\,G_i\,\text{mes}\,\mathscr{E}_j \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n v_n)\frac{M(u_1)M(v_1)(\text{mes}\,G)^2}{2^{2n}M(u_n)M(v_n)},$$

再由(15.16)

$$\iint_{\hat{G}} M[u(y)v(x)]dx\,dy = \infty.$$

由此可見，$u(x) \in L_M$, $v(x) \in L_M$, 而 $w(x, y) = u(y)v(x) \bar{\in} \hat{L}_M = \hat{L}_M^*$, 于是发生矛盾.

定理証毕.

由上面所証的定理可推知，不是对一切 N–函数(甚至满足 Δ_2–条件)从 $u(x) \in L_M^*$, $v(x) \in L_M^*$ 可推出 $u(y)v(x) \in \hat{L}_M^*$.

引理 15.4. 設 N–函数 $M(u)$ 滿足 Δ'–条件，則可找到常数 $a > 0$ 使得

$$\|u(y)v(x)\|_M \leqslant a\|u\|_M\|v\|_M \tag{15.17}$$

当 $u(x)$, $v(x) \in L_M$ 时.

証. 設当 $u, v \geqslant u_0 > 1$ 时

$$M(uv) \leqslant CM(u)M(v),$$

則由(15.15)

$$\iint_{\hat G} M\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0\|u\|_M u_0\|v\|_M}\right] dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C \int_G M\left[\frac{u(y)}{\|u\|_M}\right] dy \int_G M\left[\frac{v(x)}{\|v\|_M}\right] dx +$$

$$+ \operatorname{mes} G \left\{\int_G M\left[\frac{u(y)}{\|u\|_M}\right] dy + \right.$$

$$\left. + \int_G M\left[\frac{v(x)}{\|v\|_M}\right] dx\right\} + M(u_0^2)\,(\operatorname{mes} G)^2,$$

又因 $\rho\left(\frac{u}{\|u\|_M}; M\right) \leqslant 1$, $\rho\left(\frac{v}{\|v\|_M}; M\right) \leqslant 1$, 故

$$\iint_{\hat G} M\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0^2\|u\|_M\|v\|_M}\right] dx\,dy \leqslant C + 2 \operatorname{mes} G + M(u_0^2)(\operatorname{mes} G)^2,$$

因而

$$\left\|\frac{u(y)v(x)}{u_0^2\|u\|_M\|v\|_M}\right\|_M \leqslant 1 + \iint_{\hat G} M\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0^2\|u\|_M\|v\|_M}\right] dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant 1 + C + 2 \operatorname{mes} G + M(u_0^2)(\operatorname{mes} G)^2.$$

由此立即推出不等式(15.17),其中

$$a = u_0^2[1 + C + 2 \operatorname{mes} G + M(u_0^2)(\operatorname{mes} G)^2]. \quad (15.18)$$

引理証毕.

設 $Q(u)$ 和 $R(u)$ 是两个 N-函数. 我們記得关系式 $Q(u) \prec R(u)$ 表明存在常数 k 和 $u_0 > 0$,使得

$$Q(u) \leqslant R(ku) \quad (u \geqslant u_0).$$

由定理 13.1, 关系式 $Q(u) \prec R(u)$ 等价于包含关系 $L_R^* \subset L_Q^*$. 我們还記得(定理 13.3)从包含关系 $L_R^* \subset L_Q^*$ 可推出存在常数 $q > 0$ 使得

$$\|u\|_Q \leqslant q\|u\|_R \quad (u(x) \in L_R^*).$$

定理 15.3. 設 N-函数 $\Phi(u)$ 滿足 Δ'-条件并且

$$\Phi(u) \prec M_1(u), \quad \Phi(u) \prec N_2(u), \quad (15.19)$$

則它滿足条件(15.2)和(15.3).

証. 設 $u(x) \in L_{M_1}^*$, $v(x) \in L_{N_2}^*$, 則由 (15.19) $u(x) \in L_\Phi$,

$v(x) \in L_\Phi$，再由引理 15.4 $w(x, y) = u(y)v(x) \in \hat{L}_\Phi$ 并且

$$\|u(y)v(x)\|_\Phi \leqslant a\|u\|_\Phi\|v\|_\Phi.$$

又从(15.19)可推出存在常数 q_1 和 q_2 使得

$$\|u\|_\Phi \leqslant q_1\|u\|_{M_1}(u(x) \in L^*_{M_1}),$$

$$\|v\|_\Phi \leqslant q_2\|v\|_{N_2}(v(x) \in L^*_{N_2}),$$

故

$$\|u(y)v(x)\|_\Phi \leqslant l\|u\|_{M_1}\|v\|_{N_2},$$

其中 $l = aq_1q_2$.

定理証毕.

5. 連續性的充分条件.

定理 15.4(关于連續性的基本定理). 設 $\Phi(u)$ 和 $\Psi(v)$ 是互余的 N-函数，又設綫性积分算子 (15.1) 的核 $k(x, y)$ 属于空間 $\hat{L}^*_\Psi$，則算子(15.1)属于 $\{L^*_{M_1} \to L^*_{M_2}; \text{н.}\}$，假如滿足下列条件之一:

а) $$M_2[N_1(v)] \prec \Psi(v), \qquad (15.20)$$

б) $$N_1[M_2(v)] \prec \Psi(v), \qquad (15.21)$$

в) 函数 $\Phi(u)$ 滿足 Δ'-条件并且

$$N_1(v) \prec \Psi(v), \quad M_2(v) \prec \Psi(v). \qquad (15.22)$$

証. 由定理 3.1 从条件 а) 可推出引理 15.1 的条件，从条件 б) 可推出引理 15.2 的条件，又从条件 в) 可推出定理 15.3 的条件. 再由这些引理和定理 15.3 的結論可知，定理 15.1 的条件滿足，从而即可推出所要証明的命題.

定理証毕.

注意条件 в) 中所确定的 N-函数 $\Psi(v)$ 必須滿足条件

$$|v|^\alpha \prec \Psi(v), \qquad (15.23)$$

其中 $\alpha > 1$. 这从每一个余 N-函数滿足 Δ_2-条件的 N-函数必滿足条件(15.23)的明显事实即可推出.

定理 15.4 的条件 а), б), в) 并不等价. 譬如为了选择函数 $\Psi(v)$ 滿足条件 (15.20) 或 (15.21)，自然首先要查明复合函数 $M_2[N_1(v)]$ 或 $N_1[M_2(v)]$ 中那一个的增加速度較慢. 我們自然还会推測，要回答这个問題只須知道关系式 $N_1(u) \prec M_2(u)$ 或 $M_2(u)$

$\prec N_1(u)$ 中那一个成立．然而并不如此．

例如 $N_1(u) = u^2, M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ 有关系式 $N_1(u) \prec \prec M_2(u)$． 此时 N-函数 $N_1[M_2(v)]$ 和 $M_2[N_1(v)]$ 并不等价，且有 $N_1[M_2(v)] \prec M_2[N_1(v)]$，因为

$$N_1[M_2(v)] \sim M_2(v), \quad M_2[N_1(v)] \sim e^{v^2} - 1$$

且对任何 $k > 0$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{N_1[M_2(kv)]}{M_2[N_1(v)]} = 0.$$

又对 N-函数 $N_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1, M_2(u) = e^{u^2} - 1$ 同样有关系式 $N_1(u) \prec M_2(u)$，N-函数 $N_1[M_2(v)]$ 和 $M_2[N_1(v)]$ 也不等价，但 $M_2[N_1(v)] \prec N_1[M_2(v)]$，因为对任何 $k > 0$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{N_1[M_2(v)]}{M_2[N_1(kv)]} = \infty.$$

定理 15.4 条件 a)，б)，в) 的詳細比較将在以后进行．

6. 連續算子的分解． 設 $\mathbf{A}$ 是映 G 上平方可求和的函数空間 L^2 到它自己內的正定自共軛綫性算子． 大家知道[2]算子 $\mathbf{A}$ 有譜分解式

$$\mathbf{A} = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda,$$

其中 E_λ 是算子 $\mathbf{A}$ 的譜函数．又算子 $\mathbf{A}^2$ 有譜分解式

$$\mathbf{A}^2 = \int_0^\infty \lambda^2 dE_\lambda.$$

当算子 $\mathbf{A}$ 全連續时，譜分解式变成无穷級数

$$\mathbf{A}\varphi(x) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i(e_i, \varphi)e_i(x) \quad (\varphi(x) \in L^2), \quad (15.24)$$

其中 $e_i(x)$ 是算子 $\mathbf{A}$ 的固有函数，相应于非 0 的固有值 λ_i．(e, φ) 表示函数 $e(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的內积：

$$(e, \varphi) = \int_G e(x)\varphi(x)dx,$$

此时

$$\mathbf{A}^2\varphi(x) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2(e_i, \varphi)e_i(x).$$

我們称 $\bar{\mathbf{B}}$ 为映巴拿哈空間 E_1 的子集 $D(\mathbf{B})$ 到巴拿哈空間 E_2 內的算子 $\mathbf{B}$ 的連續扩张，假如 $\bar{\mathbf{B}} \in \{E_1 \to E_2; \text{H.}\}$ 并且 $\bar{\mathbf{B}}\varphi = \mathbf{B}\varphi$ 当 $\varphi \in D(\mathbf{B})$ 时.

定理 15.5. 設 $M(u)$ 和 $N(u)$ 是互余的 N-函数并且 $N(u) \prec \prec u^2 \prec M(u)$，又設算子 $\mathbf{A}^2$（$\mathbf{A}$ 是 $\{L^2 \to L^2; \text{H.}\}$ 中的正定自共軛綫性算子）有連續扩张 $\overline{\mathbf{A}^2} \in \{E_N \to L_M^*; \text{H.}\}$，則 $\mathbf{A} \in \{L^2 \to L_M^*; \text{H.}\}$.

証. 設 $\varphi(x) \in L^2$，則由荷尔德不等式

$$\|\mathbf{A}\varphi\|_{L^2}^2 = (\mathbf{A}^2\varphi, \varphi) = (\overline{\mathbf{A}^2}\varphi, \varphi) \leqslant$$
$$\leqslant \|\overline{\mathbf{A}^2}\varphi\|_M \|\varphi\|_N \leqslant \|\overline{\mathbf{A}^2}\| \|\varphi\|_N^2,$$

即

$$\|\mathbf{A}\varphi\|_{L^2} \leqslant k\|\varphi\|_N \quad (\varphi(x) \in L^2). \tag{15.25}$$

显然 L^2 在 E_N 內稠密，因为它包含所有有界函数. 于是从 (15.25) 可推出算子 $\mathbf{A}$ 可連續地扩张到整个 E_N 上. 記扩张算子为 $\mathbf{A}_1$，則內积 $\boldsymbol{l}(\varphi) = (\mathbf{A}_1\varphi, \psi)$ 确定了 E_N 上的綫性連續泛函，其中 $\psi(x)$ 是 L^2 中固定的元素. 根据 E_N 上綫性泛函的一般表达式（定理 14.2）有函数 $u(x) \in L_M^*$ 使得

$$\boldsymbol{l}(\varphi) = (\varphi, u) = \int_G \varphi(x)u(x)dx.$$

定义算子 $\mathbf{A}_1^*$:

$$\mathbf{A}_1^*\psi(x) = u(x),$$

則由(10.4)

$$\|\mathbf{A}_1^*\psi\|_M = \sup_{\substack{\rho(\varphi;\, N) \leqslant 1 \\ \varphi(x) \in E_N}} |(\mathbf{A}_1^*\psi, \varphi)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{\|\varphi\|_N \leqslant 2 \\ \varphi(x) \in E_N}} |(\psi, \mathbf{A}_1\varphi)| \leqslant 2k\|\psi\|_{L^2},$$

因而算子 $\mathbf{A}_1^*$ 属于 $\{L^2 \to L_M^*; \text{H.}\}$. 今証 $\mathbf{A}_1^*\psi(x) = \mathbf{A}\psi(x)$. 这由对任何函数 $\varphi(x) \in L^2$ 恆有

$$(\mathbf{A}_1^*\psi, \varphi) = (\psi, \mathbf{A}_1\varphi) = (\psi, \mathbf{A}\varphi) = (\mathbf{A}\psi, \varphi)$$

即可推出.

定理証毕.

五甲

算子 $\mathbf{A}$ 的平方根 $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ 定义为平方等于 $\mathbf{A}$ 的算子. 算子 $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ 有譜分解式

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{2}} dE_\lambda,$$

而当 $\mathbf{A}$ 为全連續算子时

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\frac{1}{2}}(e_i, \varphi)e_i(x).$$

定理 15.6. 設在 L^2 內正定自共軛且連續的綫性算子 $\mathbf{A}$ 有連續扩张 $\bar{\mathbf{A}} \in \{E_N \to L_M^*; \text{н.}\}$, 其中 $N(u) \prec u^2 \prec M(u)$, 則算子 $\bar{\mathbf{A}}$ 有分解式

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*, \tag{15.26}$$

其中 $\mathbf{H} \in \{L^2 \to L_M^*; \text{н.}\}$, 而 $\mathbf{H}^*$ 是 $\mathbf{H}$ 的共軛算子, 它属于 $\{E_N \to \to L^2; \text{н.}\}$[1].

証. 置 $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, 則由定理 15.5, $\mathbf{H}$ 属于 $\{L^2 \to L_M^*; \text{н.}\}$. 显然算子 $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ 与算子 $\mathbf{A}$ 在 L^2 上采取相同的值, 因为对任意一对函数 $\varphi(x), \psi(x) \in L^2$

$$(\mathbf{H}\mathbf{H}^*\varphi, \psi) = (\mathbf{H}^*\varphi, \mathbf{H}^*\psi) =$$
$$= (\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\psi) = (\mathbf{A}\varphi, \psi).$$

因此算子 $\mathbf{H}\mathbf{H}^* \in \{E_N \to L_M^*; \text{н.}\}$ 是算子 $\mathbf{A}$ 的連續扩张. 于是由算子 $\mathbf{A}$ 的連續扩张的唯一性, 因为 L^2 按 E_N 的范数在 E_N 內稠密, 即可推出等式(15.26).

定理証毕.

表达式 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*$ 叫做算子 $\mathbf{A}$ 的分解.

§ 16. 綫性积分算子全連續性的条件

1. 連續核的情形. 让我們継續研究綫性积分算子

$$\mathbf{A}u(x) = \int_G k(x, y)u(y)dy. \tag{16.1}$$

1) 算子 $\mathbf{H}^*$ 是由下列等式确定的:

$$(\mathbf{H}^*\varphi, \psi) = (\varphi, \mathbf{H}\psi) \quad (\psi(x) \in L^2, \varphi(x) \in E_N).$$

本节要研究算子(16.1)全連續条件的問題，即算子(16.1)变空間 $L^*_{M_1}$ 的单位球为空間 $L^*_{M_2}$ 的列紧集所要滿足的条件.

引理 16.1. 設核 $k(x, y)$ 在 $\bar{G}$ 上連續，又設 $L^*_{M_1}$ 和 $L^*_{M_2}$ 是两个任意的奥尔里奇空間，則算子(16.1)属于 $\{L^*_{M_1} \to E_{M_2};$ вп. н.$\}$.

証. 由定理 15.4，算子 $\mathbf{A}$ 属于 $\{L^*_{M_1} \to L^*_{M_2};$ н.$\}$.

設 T 是空間 $L^*_{M_1}$ 的单位球，則因对 $u(x) \in T$ 有

$$\int_G |u(x)|dx \leqslant \|u\|_{M_1}\|\kappa(x;\, G)\|_{N_1} \leqslant \text{mes}\, G M_1^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes}\, G}\right),$$

故当 $x \in G$, $u(x) \in T$ 时

$$|\mathbf{A}u(x)| = \left|\int_G k(x, y)u(y)dy\right| \leqslant K\, \text{mes}\, G M_1^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes}\, G}\right),$$

其中 $K = \max|k(x, y)|\,(x, y \in G)$.

换言之，函数 $|\mathbf{A}u(x)|\,(u(x) \in T)$ 一致有界.

給定 $\varepsilon > 0$, 选择 $\delta > 0$ 使得

$$|k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{\text{mes}G\, M_1^{-1}\left(\dfrac{1}{\text{mes}\, G}\right)}$$

当 $d(x_1, x_2) < \delta$ 时，其中 $d(x_1, x_2)$ 表示点 $x_1, x_2 \in G$ 之間的距离. 則当 $d(x_1, x_2) < \delta$ 时对任意函数 $u(x) \in T$, 由空間 $L^*_{N_1}$ 内集合 G 的特征函数的范数公式有

$$|\mathbf{A}u(x_1) - \mathbf{A}u(x_2)| \leqslant \int_G |k(x_1, y) - k(x_2, y)||u(y)|dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\text{mes}\, GM_1^{-1}\left(\dfrac{1}{\text{mes}\, G}\right)}\int_G |u(y)|dy \leqslant \varepsilon.$$

由此可見，函数 $\mathbf{A}u(x)\,(u(x) \in T)$ 同等連續.

由阿尔采拉定理，集合 $\mathbf{A}T$ 于 G 上的連續函数空間 C 内列紧，从而更在任意的奥尔里奇空間内列紧.

最后因函数 $\mathbf{A}u(x)$ 皆連續，故它們都属于 E_{M_2}.

引理証毕.

2. 基本定理. 利用奥尔里奇空間内函数族列紧性的判别法

可以得到形如(16.1)的算子全連續的条件．更簡单的途径是建立由明显的全連續算子任意精确地逼近算子(16.1)的可能性．作为这种逼近算子，采用具有連續核的积分算子是方便的．

在某些情况下定理 15.1 和定理 15.4 的条件对算子 (16.1) 的全連續性来説还是充分的．我們不知道在一般情况下这些条件是否仍然充分．今証算子 (16.1) 的全連續性得到保証，假如定理 15.1 和 15.4 的条件 $k(x, y) \in \hat{L}_{\Psi}^{*}$ 換成更強的条件 $k(x, y) \in \hat{E}_{\Psi}$．我們利用相应的两个結論加以証明，这在今后是有用的．

定理 16.1(关于全連續性充分条件的定理)．設 $\Phi(u)$ 和 $\Psi(v)$ 是互余的 N-函数，又設綫性积分算子 (16.1) 的核 $k(x, y)$ 属于空間 $\hat{E}_{\Psi}$，則定理 15.4 的条件 а)，б)，в)：

а) $M_2[N_1(v)] \prec \Psi(v)$,

б) $N_1[M_2(v)] \prec \Psi(v)$,

в) 函数 $\Phi(u)$ 满足 Δ'-条件并且

$$N_1(v) \prec \Psi(v),\ M_2(v) \prec \Psi(v)$$

中的每一个都充分保証了算子(16.1)属于 $\{L_{M_1}^{*} \to E_{M_2};\ \text{вп. н.}\}$．

証．因 $k(x, y) \in \hat{E}_{\Psi}$，故可作出連續核的叙列 $k_n(x, y)(n = 1, 2, \cdots)$ 使得

$$\|k(x, y) - k_n(x, y)\|_{\hat{\Psi}} < \frac{1}{n}.$$

以 $\mathbf{A}_n$ 表示綫性积分算子

$$\mathbf{A}_n u(x) = \int_G k_n(x, y) u(y) dy.$$

由引理 16.1，这些算子映 $L_{M_1}^{*}$ 到 E_{M_2} 内并且全連續．

根据定理所給的条件，定理 15.1 的条件满足，因此由(15.6)

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_n\| \leqslant 2l \|k(x, y) - k_n(x, y)\|_{\hat{\Psi}} < \frac{2l}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots).$$

換言之，算子 $\mathbf{A}$ 可由取值于 E_{M_2} 的全連續算子按范数任意精确地逼近，因而推出定理的結論．

定理 16.1 可从两个完全不同的方向加以应用．

首先是确定函数 $\Psi(v)$ 的性质，使得算子(16.1)映給定的空間 $L^*_{M_1}$ 到給定的空間 E_{M_2} 内，并且是全連續的。在这种情况下应用定理 16.1 要受到驗証核 $k(x, y)$ 是否属于空間 $\hat{E}_\Psi$，即是否对一切 $\lambda > 0$ 满足条件

$$\iint_{\hat{G}} \Psi[\lambda k(x, y)]dx\,dy < \infty \tag{16.2}$$

的障碍。

若 N-函数 $\Psi(v)$ 满足 Δ_2-条件，则(16.2)等价于条件

$$\iint_{\hat{G}} \Psi[k(x, y)]dx\,dy < \infty. \tag{16.3}$$

若 N-函数 $\Psi(v)$ 不满足 Δ_2-条件，則驗証条件(16.2)是有困难的。不难看出(16.2)滿足，假如

$$\iint_{\hat{G}} \Psi\{Q[k(x, y)]\}dx\,dy < \infty, \tag{16.4}$$

其中 $Q(u)$ 是某一 N-函数。还可注意条件(16.2)(16.3)(16.4)中的函数 $\Psi(v)$ 可换成任何等价于 $\Psi(v)$ 的 N-函数的主部 $R(v)$。

其次是寻找 N-函数 $M_1(u), M_2(u)$，使得具有給定的核 $k(x, y)$ 的算子 (16.1) 映 $L^*_{M_1}$ 到 E_{M_2} 内并且是全連續的。此时 N-函数 $M_1(u)$, $M_2(u)$ 应这样的选择，使得它满足条件(15.20), (15.21)和(15.22)中的一个。

3. 全連續性和 E_N-弱收斂性. 大家知道，映一巴拿哈空間到另一巴拿哈空間内的全連續綫性算子变弱收斂的点列为按范数收斂的点列。

因为在奥尔里奇空間内 E_N-弱收斂一般說来要比在通常意义下的弱收斂更为广泛，所以为了使得映一奥尔里奇空間 $L^*_{M_1}$ 到另一奥尔里奇空間 $L^*_{M_2}$ 内的全連續綫性算子对 E_N-弱收斂也具有类似的性质，就須要附加另外的条件。

在这里我們对綫性积分算子 (16.1) 来闡述这个問題。为此，我們假定算子 $\mathbf{A}$ 的核 $k(x, y)$ 还满足下列条件：对任意一对函数 $u(x) \in L^*_{M_1}$, $v(x) \in L^*_{N_2}$

$$\iint_G k(x, y)u(y)v(x)dx\,dy < \infty. \tag{16.5}$$

由上述条件算子 $\mathbf{A}$ 映 $L^*_{M_1}$ 到 $L^*_{M_2}$ 内，又由等式

$$\mathbf{A}^*v(x) = \int_G k(y, x)v(y)dy \tag{16.6}$$

所定义的算子 $\mathbf{A}^*$ 映 $L^*_{N_2}$ 到 $L^*_{N_1}$ 内，并且对任意一对函数 $u(x) \in L^*_{M_1}$, $v(x) \in L^*_{N_2}$ 有等式

$$\int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx = \int_G u(y)\mathbf{A}^*v(y)dy. \tag{16.7}$$

引理 16.2. 具有满足条件(16.5)的核 $k(x, y)$ 的連續綫性积分算子 $\mathbf{A}$ 变每一个 $L^*_{M_1}$ 的 E_{N_1}-弱收斂函数列为 $L^*_{M_2}$ 的 E_{N_2}-弱收斂函数列的充要条件是算子 $\mathbf{A}^*$ 映 E_{N_2} 到 E_{N_1} 内.

証. 引理条件的充分性是显然的，因为数列

$$l(\mathbf{A}u_n) = \int_G \mathbf{A}u_n(x)v(x)dx$$

对任何函数 $v(x) \in E_{N_2}$ 恆收斂，这由等式(16.7)和 $\mathbf{A}^*v(x) \in E_{N_1}$ 即可推出.

現在来証明引理条件的必要性. 設連續綫性积分算子 $\mathbf{A}$ 变每一个 $L^*_{M_1}$ 的 E_{N_1}-弱收斂函数列为 $L^*_{M_2}$ 的 E_{N_2}-弱收斂函数列，又設 $v(x) \in E_{N_2}$，則由等式

$$l(u) = \int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx$$

所定义的泛函是 $L^*_{M_1}$ 上的 E_{N_1}-弱連續泛函. 于是由定理 14.7，該泛函又可表成

$$l(u) = \int_G u(x)v^*(x)dx,$$

其中 $v^*(x) \in E_{N_1}$.

另一方面，再由(16.7)便知对任何函数 $u(x) \in L^*_M$

$$\int_G u(x)v^*(x)dx = \int_G u(x)\mathbf{A}^*v(x)dx,$$

因此对几乎所有的 $x \in G$

$$v^*(x) = \mathbf{A}^*v(x),$$

即 $\mathbf{A}^* v(x) \in E_{N_1}$.

引理証毕.

从上述引理立卽推出下列定理.

定理 16.2. 具有满足条件(16.5)的核 $k(x, y)$ 的全連續綫性积分算子 $\mathbf{A}$ 变每一个 $L^*_{M_1}$ 的 E_{N_1}-弱收斂函数列为 $L^*_{M_2}$ 按范数收斂的函数列的充要条件是算子 $\mathbf{A}^*$ 映 E_{N_2} 到 E_{N_1} 內.

証. 定理条件的必要性显然从引理 16.2 卽可推出，而充分性由引理 16.2,定理 14.3 和定理 14.5 也可推出.

定理証毕.

注意,在算子(16.1)全連續性的定理 16.1 的条件下,(16.5)一定满足并且由等式(16.6)所定义的算子 $\mathbf{A}^*$ 映 $L^*_{N_2}$ 到 E_{N_1} 內(当然更映 E_{N_2} 到 E_{N_1} 內). 現在来証明后一結論.

在定理 16.1 的条件下,(15.2)和(15.3)匧满足. 設 $v(x) \in L^*_{N_2}$, ε 是任意正数. 因核 $k(x, y)$ 属于 $\hat{E}_\psi$, 故在 $\hat{L}^*_\psi$ 內有絕对連續的范数,于是可找到 $\delta > 0$ 使得从 $\operatorname{mes} \hat{\mathscr{E}} < \delta$ 可推出

$$\|k(x, y)\kappa(x, y; \hat{\mathscr{E}})\|_{\hat{\psi}} < \frac{\varepsilon}{2\|v\|_{N_2} l} \quad (\hat{\mathscr{E}} \subset \hat{G}),$$

其中 l 是条件(15.3)中的常数. 設 $\mathscr{E} \subset G$, $u(x) \in L_{M_1}$, 則

$$\int_{\mathscr{E}} \mathbf{A}^* v(x) u(x) dx = \int_{\mathscr{E}} \int_G k(y, x) v(y) u(x) dx\, dy = $$
$$= \iint_{\hat{\mathscr{E}}} k(y, x) v(y) u(x) dx\, dy,$$

其中 $\hat{\mathscr{E}} = \mathscr{E} \times G$.

假定 $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \dfrac{\delta}{\operatorname{mes} G}$ 并且 $\rho(u, M_1) \leqslant 1$, 則 $\operatorname{mes} \hat{\mathscr{E}} = \operatorname{mes} \mathscr{E}$. $\operatorname{mes} G < \delta$, $\|u\|_{M_1} \leqslant 1 + \rho(u, M_1) \leqslant 2$. 应用荷尔德不等式和(15.3)于上述等式的后一积分,得到

$$\left|\int_{\mathscr{E}} \mathbf{A}^* v(x) u(x) dx\right| \leqslant l \|k(x, y)\, \kappa(x, y; \hat{\mathscr{E}})\|_{\hat{\psi}} \cdot 2\|v\|_{N_2} < \varepsilon.$$

因而推出 $\|\mathbf{A}^* v(x) \kappa(x; \mathscr{E})\|_{N_1} < \varepsilon$ 当 $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \dfrac{\delta}{\operatorname{mes} G}$ 时. 这表

明函数 $\mathbf{A}^*v(x)$ 在 $L^*_{N_1}$ 內有絕对連續的范数,从而属于 E_{N_1}.

由此可見,在定理 16.1 的条件下不再附加其它的假設,算子(16.1)就可以变每一个 $L^*_{M_1}$ 的 E_{N_1}-弱收斂函数列为 $L^*_{M_2}$ 按范数收斂的函数列.

再注意定理 16.2 的結論,对抽象的綫性全連續算子 $\mathbf{A}$ 仍然有效,假如 N-函数 $M_1(u)$ 滿足 Δ_2-条件,而算子 $\mathbf{A}^*$ 由下列方式定义. 設 $v(x) \in L^*_{N_2}$. 考虑由下式在 $L^*_{M_1} = E_{M_1}$ 上所定义的綫性泛函

$$\boldsymbol{l}(u) = \int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx.$$

由定理 14.2,上述泛函可以表成

$$\boldsymbol{l}(u) = \int_G u(x)v^*(x)dx,$$

其中 $v^*(x) \in L^*_{N_1}$. 我們令 $\mathbf{A}^*v(x) = v^*(x)$. 由此可見,算子 $\mathbf{A}^*$ 映 $L^*_{N_2}$ 到 $L^*_{N_1}$ 內并且等式(16.7)成立.

4. 蔡年定理.

引理 16.3. 若核 $k(x, y)$ 滿足下列条件之一:

a) 几乎对所有的 $x \in G$, 核 $k(x, y)$ 看成 y 的函数,属于空間 $L^*_{N_1}$, 并且函数 $\varphi(x) = \|k(x, y)\|_{N_1}$ 属于空間 $L^*_{M_2}$;

б) 几乎对所有的 $y \in G$, 核 $k(x, y)$ 看成 x 的函数,属于空間 $L^*_{M_2}$, 并且函数 $\psi(y) = \|k(x, y)\|_{M_2}$ 属于空間 $L^*_{N_1}$,

则算子(16.1)属于 $\{L^*_{M_1} \to L^*_{M_2}; \text{н.}\}$.

證. 假定滿足条件 a), 則对任何函数 $u(x) \in L^*_{M_1}$, $v(x) \in L_{N_2}$, 由荷尔德不等式

$$\left|\int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx\right| \leqslant \int_G\left|\int_G k(x, y)u(y)dy\right||v(x)|dx \leqslant$$
$$\leqslant \|u\|_{M_1}\int_G \varphi(x)|v(x)|dx,$$

因而

$$\|\mathbf{A}u\|_{M_2} = \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\left|\int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx\right| \leqslant \|\varphi\|_{M_2}\|u\|_{M_1}.$$

假如滿足条件 б), 那末交換积分次序(由富比尼定理这是可

能的)对任何函数 $u(x) \in L^*_{M_1}$, $v(x) \in L_{N_2}$ 可得

$$\left|\int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx\right| \leqslant \int_G \left|\int_G k(x, y)v(x)dx\right| |u(y)|dy \leqslant$$

$$\leqslant \|v\|_{N_2}\int_G \psi(y)|u(y)|dy \leqslant \|v\|_{N_2}\|\psi\|_{N_1}\|u\|_{M_1},$$

因而

$$\|\mathbf{A}u\|_{M_2} = \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\left|\int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|v\|_{N_2}\leqslant 2}\left|\int_G \mathbf{A}u(x)v(x)dx\right| \leqslant 2\|\psi\|_{N_1}\|u\|_{M_1}.$$

引理証毕.

定理 16.3. 設几乎对所有的 $x \in G$ 核 $k(x, y)$ 看成 y 的函数, 属于 E_{N_1}, 并且函数 $\varphi(x) = \|k(x, y)\|_{N_1}$ 属于 E_{M_2}, 则算子 (16.1) 属于 $\{L^*_{M_1} \to E_{M_2};$ вп. н.$\}$.

証. 由上述引理, 算子(16.1)映 $L^*_{M_1}$ 到 $L^*_{M_2}$ 内并且連續. 剩下要証的是:該算子变空間 $L^*_{M_1}$ 的单位球 T 为 E_{M_2} 的列紧函数集. 由于单位球 E_{N_1}-弱列紧, 所以又只須証明算子 $\mathbf{A}$ 变单位球 T 的 E_{N_1}-弱收斂函数列为 E_{M_2} 按范数收斂的函数列.

設函数列 $u_n(x) \in T(n = 1, 2, \cdots) E_{N_1}$-弱收斂于函数 $u_0(x)$, 則由定理的条件, 函数列 $\mathbf{A}u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 几乎处处收斂于函数 $\mathbf{A}u_0(x)$, 从而依測度收斂于該函数. 今証函数 $\mathbf{A}u_n(x)$ 在 $L^*_{M_2}$ 内有等度的絕对連續范数. 設 $\kappa(x, \mathscr{E})$ 是集合 $\mathscr{E} \subset G$ 的特征函数, $v(x) \in L_{N_2}$, 則

$$\left|\int_{\mathscr{E}} \mathbf{A}u_n(x)v(x)dx\right| \leqslant \int_{\mathscr{E}}\left|\int_G k(x, y)u_n(y)dy\right| |v(x)|dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathscr{E}} \varphi(x)|v(x)|dx,$$

因而

$$\|\mathbf{A}u_n(x)\kappa(x; \mathscr{E})\|_{M_2} = \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\left|\int_{\mathscr{E}} \mathbf{A}u_n(x)v(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi(x)\kappa(x; \mathscr{E})\|_{M_2}.$$

因函数 $\varphi(x) \in E_{M_2}$, 故由此可知函数 $\mathbf{A}u_n(x)$ 有等度的絕对連續范数.

于是由引理 11.2,函数列 $Au_n(x)$ 属于 E_{M_2} 并且按范数收斂.

定理証毕.

下列結論补充了定理 16.3.

定理 16.4. 設几乎对所有的 $y \in G$ 核 $k(x, y)$ 看成 x 的函数, 属于 E_{M_2}, 并且函数 $\psi(y) = \|k(x, y)\|_{M_2}$ 属于 E_{N_1}. 则算子 (16.1) 属于 $\{E_{M_1} \to E_{M_2};$ вп. н.$\}$.

証. 由引理 16.3

$$\mathbf{A} \in \{L^*_{M_1} \to L^*_{M_2}; \text{ н.}\}.$$

我們来研究等式(16.6)所定义的算子 $\mathbf{A}^*$. 由定理 16.3, 算子 $\mathbf{A}^*$ 属于 $\{L^*_{N_2} \to E_{N_1};$ вп. н.$\}$ 并且变每一个 $L^*_{N_2}$ 的 E_{M_2}-弱收斂函数列为 E_{N_1} 内按范数收斂的函数列. 于是由定理 16.2, 算子 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$ 映 E_{M_1} 到 E_{M_2} 内. 为了完成定理的証明,我們只須証算子 $\mathbf{A}$ 变每一个 $L^*_{M_1}$ 的单位球 T 的 E_{N_1}-弱收斂函数列为 $L^*_{M_2}$ 内按范数收斂的函数列.

設函数列 $u_n(x) \in T (n = 1, 2, \cdots) E_{N_1}$-弱收斂于函数 $u_0(x)$. 容易看出 $\|u_0\|_{M_1} \leqslant 2$. 又函数列 $\mathbf{A}u_n(x) E_{N_2}$-弱收斂于函数 $\mathbf{A}u_0(x)$, 因为对每一个函数 $v(x) \in E_{N_2}$, 由等式(16.7)

$$\lim_{n\to\infty}\int_G \mathbf{A}[u_n(x) - u_0(x)]v(x)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_G [u_n(x) - u_0(x)]\mathbf{A}^*v(x)dx = 0.$$

給定 $\varepsilon > 0$, 我們用 $\mathbf{A}^*v_1(x), \mathbf{A}^*v_2(x), \cdots, \mathbf{A}^*v_s(x)$ 来表示集合 $\{\mathbf{A}^*v\}(\rho(v; N_2) \leqslant 1)$ 的有限 $\frac{\varepsilon}{6}$-网 (因为由算子 $\mathbf{A}^*$ 的全連續性集合 $\{\mathbf{A}^*v\}(\rho(v; N_2) \leqslant 1)$ 列紧). 此时对每一个函数 $v(x) \in L_{N_2}(\rho(v; N_2) \leqslant 1)$ 可找到函数 $v_{i(v)}(x)$ 使得

$$\|\mathbf{A}^*v - \mathbf{A}^*v_{i(v)}\|_{N_1} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

假設当 $n \geqslant n_0$ 时满足不等式

$$\int_G [u_n(x) - u_0(x)]\mathbf{A}^*v_i(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, s),$$

则当 $n \geqslant n_0$ 时

$$\|\mathbf{A}u_n - \mathbf{A}u_0\|_{M_2} = \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\left|\int_G \mathbf{A}[u_n(x) - u_0(x)]v(x)dx\right| =$$

$$= \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\left|\int_G [u_n(x) - u_0(x)]\mathbf{A}^*v(x)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\left|\int_G [u_n(x) - u_0(x)]\mathbf{A}^*v_{i(v)}(x)dx\right| +$$

$$+ \sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\int_G |u_n(x)-u_0(x)||\mathbf{A}^*v(x)-\mathbf{A}^*v_{i(v)}(x)|dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \|u_n - u_0\|_{M_1}\sup_{\rho(v;N_2)\leqslant 1}\|\mathbf{A}^*v - \mathbf{A}^*v_{i(v)}\|_{N_1} < \varepsilon,$$

即函数列 $\mathbf{A}u_n(x)$ 按范数收斂于 $\mathbf{A}u_0(x)$.

定理証毕.

注意，定理 16.1 条件 a) 的充分性可看成定理 16.3 的推論. 实际上,設核 $k(x, y)$ 属于空間 $\hat{E}_{M_2[N_1]}$，則对任何 $\lambda > 0$

$$\iint_{\hat{G}} M_2\{N_1[\lambda k(x, y)]\}dx\,dy < \infty. \qquad (16.8)$$

由此可知,定理 16.3 的条件滿足.

事实上,从(16.8)可推出对任何 $\lambda > 0$,几乎对所有的 $x \in G$

$$\int_G N_1[\lambda k(x, y)]dy < \infty.$$

这說明几乎对所有的 $x \in G$ 核 $k(x, y)$ 看成 y 的函数，属于空間 E_{N_1}. 又对函数 $\varphi(x) = \|k(x, y)\|_{N_1}$，由(9.12)有估計式

$$\varphi(x) \leqslant 1 + \int_G N_1[k(x, y)]dy.$$

为了完成它的証明,我們只須証对任何 $\mu > (2\text{mes}\, G)^{-1}$

$$\int_G M_2[\mu\varphi(x)]dx < \infty.$$

这可由(16.8)推出,因为由琴生积分不等式

$$\int_G M_2[\mu\varphi(x)]dx \leqslant \int_G M_2\left\{\mu + \mu\int_G N_1[k(x, y)]dy\right\}dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}M_2(2\mu)\text{mes}\, G +$$

$$+\frac{1}{2}\int_G M_2\left\{\frac{\int_G N_1[2\mu \operatorname{mes} G k(x, y)]dy}{\operatorname{mes} G}\right\}dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} M_2(2\mu)\operatorname{mes} G +$$

$$+\frac{1}{2\operatorname{mes} G}\iint\limits_{\hat{G}} M_2\{N_1[2\mu \operatorname{mes} G k(x, y)]\}dx\, dy < \infty.$$

5. 条件的比較. 作为第一个例子，我們来考虑最簡单的情形，即 $L^*_{M_1} = L^*_{M_2} = L^2$. 此时定理 16.1 的条件 a) 和 б) 表明，核 $k(x, y)$ 必須滿足关系式

$$\iint\limits_{\hat{G}} k^4(x, y)dx\, dy < \infty.$$

如果利用条件 в)，取函数 $\Psi(v)$ 为 v^2，則算子 (16.1) 映 L^2 到它自己內全連續只須滿足关系式

$$\iint\limits_{\hat{G}} k^2(x, y)dx\, dy < \infty. \qquad (16.9)$$

显然条件(16.9)的限制較少.

注意条件 (16.9) 对綫性积分算子映 L^2 到它自己內的全連續性并不是必要的. 显然，所有上述的全連續条件对任何奧尔里奇空間仅是充分的.

作为第二个例子，我們指出从定理 16.1 的条件 в) 倘可推出綫性积分算子(16.1)映 L^{α_1} 到 L^{α_2} 內 ($\alpha_1>1$, $\alpha_2>1$) 并且全連續，假如核 $k(x, y)$ 在 $\hat{G}$ 上 $\max\{\beta_1, \alpha_2\}$ 次冪可求和，其中 $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}=1$. 为了得到这个熟知的結果(当然，可以給出簡单的直接証明)，只須置 $\Psi(v) = |v|^{\max\{\beta_1, \alpha_2\}}$.

現在設 $M_1(u) = (1+|u|)\ln(1+|u|) - |u|$, $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$. 此时 $N_1(u) = M_2(u)$. 从定理 16.1 可推出算子(16.1)映 $L^*_{M_1} = L_{M_1}$ 到 E_{M_2} 內并且全連續的三个充分条件. 这些条件可以写成

$$\iint_{\hat{G}} \exp\{\exp|\lambda k(x, y)|\}dx\,dy < \infty,$$

假如利用条件 a) 或 б), 又可表成

$$\iint_{\hat{G}} \exp|\lambda k(x, y)|dx\,dy < \infty, \tag{16.10}$$

假如利用条件 в), 置 $\Psi(v) = M_2(v)$.

由此可見,在上述的例子中,条件 в) 的限制較少.

最后的例子实际上是举例說明了下列的定理(从定理 16.1 可直接推出),这个定理对实质上非羃非綫性的积分方程的研究起着重要的作用.

定理 16.5. 設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数并且 $N(v)$ 满足 Δ'-条件,又設对任何 $\lambda > 0$

$$\iint_{\hat{G}} M[\lambda k(x, y)]dx\,dy < \infty,$$

則綫性积分算子(16.1)属于 $\{L_N \to E_M;\ \text{вп. н.}\}$.

在下面的例子中置 $M_1(u) = \dfrac{|u|^\alpha}{\alpha}$ $(\alpha > 1)$, $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$. 为了使得算子(16.1)全連續,只須由条件 a)

$$\iint_{\hat{G}} \exp|\lambda k(x, y)|^\beta dx\,dy < \infty \quad \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right)$$

对任何 $\lambda > 0$ 成立,而由条件 б) 或 в)

$$\iint_{\hat{G}} \exp|\lambda k(x, y)|dx\,dy < \infty.$$

当然第二个条件的限制較少. 我們再注意,它与前面的例子中的条件(16.10)一致. 这不是偶然的,因为有下列的一般結論:

定理 16.6. 設

$$M_1(u) \prec \Phi_1(u), \quad \Phi_2(u) \prec M_2(u), \tag{16.11}$$

則 $\{L^*_{M_1} \to E_{M_2};\ \text{вп. н.}\}$ 中的每一个綫性算子都属于 $\{L^*_{\Phi_1} \to E_{\Phi_2};\ \text{вп. н.}\}$.

証. 从包含关系

$$L^*_{\Phi_1} \subset L^*_{M_1}, \quad E_{M_2} \subset E_{\Phi_2}$$

即可推出 $\mathbf{A} \in \{L^*_{\Phi_1} \to E_{\Phi_2}\}$. 又由定理 13.3 和(16.11)有不等式

$$\|u\|_{M_1} \leqslant q_1\|u\|_{\Phi_1} \quad (u(x) \in L^*_{\Phi_1})$$

和

$$\|u\|_{\Phi_2} \leqslant q_2\|u\|_{M_2} \quad (u(x) \in L^*_{M_2}).$$

設 T 是 $L^*_{\Phi_1}$ 的有界集,則由上述的第一个不等式 T 在 $L^*_{M_1}$ 中有界.因此集合 $\mathbf{A}T$ 在 $L^*_{M_2}$ 中列紧. 再由第二个不等式它在 $L^*_{\Phi_2}$ 中列紧.

定理証毕.

从前面的例子可以看到,在許多情况中条件 в) 的限制比条件 a) 和 б) 要少. 現在我們举出例子来說明并非永远如此.

設

$$M_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1,$$

$$M_2(u) = (1 + |u|)\ln(1 + |u|) - |u|.$$

此时 $E_{M_2} = L^*_{M_2} = L_{M_2}$. 从定理 16.1 的条件 a) 和 б) 可推出算子(16.1)属于 $\{L^*_{M_1} \to E_{M_2};\ \text{вп. н.}\}$, 假如滿足不等式

$$\iint_G |k(x, y)| \ln^2(1 + |k(x, y)|)\,dx\,dy < \infty. \tag{16.12}$$

而应用条件 в) 就要归結到 (参看 140 頁的附注) 核 $k(x, y)$ 关于幂 $\alpha > 1$ 可求和的假定,即归結到限制更多的条件.

綜上所述, 我們可以陈述出寻找滿足定理 16.1 条件的函数 $\Psi(v)$ 的規律.

在这里, 我們假定任何两个所考虑的 N-函数 $\Phi_1(u)$ 和 $\Phi_2(u)$ 是"可比較"的,即滿足关系式: $\Phi_1(u) \prec \Phi_2(u)$ 或 $\Phi_2(u) \prec \Phi_1(u)$ 中的一个. 在第一种情况下我們称 $\Phi_1(u)$ "小于" $\Phi_2(u)$,而对第二种情况,則称 $\Phi_1(u)$ "大于" $\Phi_2(u)$.

假設給定了空間 $L^*_{M_1}$ 和 $L^*_{M_2}$, 我們来研究 N-函数 $M_1(u)$ 和 $N_2(u)$. 如果它們中的較小者滿足 Δ'-条件, 則取它的余 N-函数为 $\Psi(v)$. 显然,此时滿足条件 в), 它归結到关于核 $k(x, y)$ 更少(与条件 a) 和 б) 相比)的限制.

如果函数 $M_1(u)$ 和 $N_2(u)$ 中的較少者不滿足 Δ'-条件，則有两种可能：

1. 函数 $M_1(u)$和$N_2(u)$的增加速度都快于任意冪 $|u|^\alpha(\alpha>1)$. 我們还假定它們滿足 Δ_3-条件. 此时函数 $N_1(v)$ 和 $M_2(v)$ 的增加速度都慢于任意冪 $|v|^\beta(\beta>1)$. 利用定理 16.1 的条件 a) 或 б) 和定理 6.9，我們可以取 $\Psi(v)=\dfrac{N_1(v)M_2(v)}{|v|}$,在这种情况下它等价于函数 $M_2[N_1(v)]$ 和 $N_1[M_2(v)]$中的一个，而"小于"另一个. 容易看出，函数 $\Psi(v)$ 的增加速度也慢于任意冪 $|v|^\beta(\beta>1)$. 又由 140 頁的附注，滿足条件 в) 的函数 $\Psi(v)$ 的增加速度快于某一冪函数 $|v|^{\beta_0}(\beta_0>1)$，这归結到关于核 $k(x, y)$ 更多的限制.

2. 函数 $M_1(u)$ 和 $N_2(u)$ 中的較小者不滿足 Δ'-条件，并且也不滿足 Δ_3-条件. 在这种情况下，我們可以利用条件 в)，取函数 $\Psi(v)$ 为某一 N-函数，它大于 $N_1(v)$ 和 $M_2(v)$，而且又是滿足 Δ'-条件的 N-函数的余函数. 也可以利用条件 a) 或 б)，取函数 $\Psi(v)$ 为函数 $M_2[N_1(v)]$ 或 $N_1[M_2(v)]$. 在某些情况下，第一种途径关于核 $k(x, y)$ 的限制較少，而对另一些情况，則又要采用第二种途徑. 今举例以明之.

設 $M_1(u)=\dfrac{u^2}{2}$, $M_2(u)=u^2(|\ln|u||+1)$. 此时函数 $N_2(u)$ 等价于 N-函数 $\dfrac{u^2}{\ln(|u|+e)}\prec M_1(u)$ 并且不滿足 Δ'-条件. 利用条件 в)，取 $\Psi(v)=|v|^{2+\varepsilon}$，其中 ε 是某一正数，我們得到关于核 $k(x, y)$ 的下列限制：

$$\iint\limits_{\hat{G}} |k(x, y)|^{2+\varepsilon}dx\,dy<\infty.$$

而应用条件 a) 或 б) 归結到更坏的条件：

$$\iint\limits_{\hat{G}} |k(x, y)|^4\ln^2(|k(x, y)|+1)dx\,dy<\infty$$

或

$$\iint_{\hat{G}} |k(x, y)|^4 \ln(|k(x, y)| + 1) dx\, dy < \infty.$$

現在設

$$M_1(u) = e^{|u|} - |u| - 1, \quad M_2(u) = u^2(|\ln|u|| + 1).$$

此时 N-函数 $N_2(u)$ 同样"小于" $M_1(u)$ 并且不滿足 Δ'-条件．应用条件 a) 归結到关于核 $k(x, y)$ 的下列限制:

$$\iint_{\hat{G}} |k(x, y)|^2 \ln^3(|k(x, y)| + 1) dx\, dy < \infty,$$

而应用条件 б) 又归結到

$$\iint_{\hat{G}} |k(x, y)|^2 \ln^2(|k(x, y)| + 1) dx\, dy < \infty.$$

为了应用条件 в)，我們必須取 $\Psi(v)$ 的余 N-函数 $\Phi(u)$ 为"小于" $\dfrac{u^2}{\ln(|u| + e)}$ 并且滿足 Δ'-条件的 N-函数．这样的函数譬如可以是 $|u|^{2-\varepsilon}$，其中 $0 < \varepsilon < 1$，但此时函数 $\Psi(v)$ 的增加速度与 $|v|^{2+\varepsilon_1}$ $(\varepsilon_1 > 0)$ 相同，因而归結到更坏的条件．

6. 全連續算子的分解．

定理 16.7． 設 $M(u)$ 和 $N(u)$ 是互余的 N-函数并且 $N(u) \prec u^2 \prec M(u)$．又設 $\mathbf{A}^2$（$\mathbf{A}$ 是 $\{L^2 \to L^2;\ \text{вп. н.}\}$ 中的正定自共軛綫性算子）有連續扩张 $\bar{\mathbf{A}}^2 \in \{E_N \to L_M^*;\ \text{вп. н.}\}$，則 $\mathbf{A} \in \{L^2 \to L_M^*;\ \text{вп. н.}\}$．

証． 因为滿足定理 15.5 的条件，所以 $\mathbf{A} \in \{L^2 \to L_M^*;\ \text{н.}\}$．

設 $\mathbf{A}_1$ 为定理 15.5 中引入的映 E_N 到 L^2 内的算子，則已証 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{A}_1$ 的共軛算子，故欲証 $\mathbf{A}$ 全連續，只須証 $\mathbf{A}_1$ 全連續．

設 L^2 中的函数列 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 在 E_N 内弱收斂．則 $\mathbf{A}_1\varphi_i(x) = \mathbf{A}\varphi_i(x)$ 并且

$$\|\mathbf{A}_1(\varphi_n - \varphi_m)\|_{L^2}^2 = (\mathbf{A}_1^2(\varphi_n - \varphi_m), \varphi_n - \varphi_m) \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{A}^2(\varphi_n - \varphi_m)\|_M \|\varphi_n - \varphi_m\|_N.$$

上式右端的第一个因子趋于 0，因为从 $\mathbf{A}^2$ 有全連續扩张的假定可推出它变每一个在 E_N 内弱收斂的函数列为 L_M^* 中按范数收

斂的叙列．而第二个因子是有界的．

因此叙列 $\mathbf{A}_1\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 L^2 内按范数收斂．

現在假定 $\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots$ 是任何在 E_N 内弱收斂的叙列．因 L^2 在 E_N 内稠密，故可选出 L^2 中这样的叙列 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$，使得 $\|\psi_n-\varphi_n\|_N\to 0$． 易見 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$ 也在 E_N 中弱收斂．根据已証的結果，叙列 $\mathbf{A}_1\varphi_n(x)$ 按 L^2 的范数收斂． 于是叙列 $\mathbf{A}_1\psi_n(x)$ 也按 L^2 的范数收斂，因为

$$\|\mathbf{A}_1(\psi_n-\psi_m)\|_{L^2}\leqslant\|\mathbf{A}_1(\varphi_n-\varphi_m)\|_{L^2}+$$
$$+\|\mathbf{A}_1(\varphi_n-\psi_n)\|_{L^2}+\|\mathbf{A}_1(\varphi_m-\psi_m)\|_{L^2}.$$

定理証毕．

仿照定理 15.6 的証明方法，我們得到下列命題：

定理 16.8. 設正定自共軛在 L^2 内全連續的綫性算子 $\mathbf{A}$ 有連續扩张 $\bar{\mathbf{A}}\in\{E_N\to L_M^*;\ \text{вп. н.}\}$，其中 $N(u)\prec u^2\prec M(u)$，則算子 $\mathbf{A}$ 有分解式

$$\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{H}\mathbf{H}^*,$$

其中 $\mathbf{H}\in\{L^2\to L_M^*;\ \text{вп. н.}\}$，而 $\mathbf{H}^*$ 是 $\mathbf{H}$ 的共軛算子，它属于 $\{E_N\to L^2;\ \text{вп. н.}\}$．

7. 关于場位型算子． 假定 G 是 n 維空間内的有界閉域(具有充分光滑的边界)．

我們称綫性积分算子为場位型算子，假如它的核是对称的并且滿足条件

$$|k(x,y)|\leqslant\frac{a}{r^\lambda}\quad(x,y\in G),\tag{16.13}$$

其中 r 是点 x 和 y 之間的距离．

場位型算子的詳細理論是索波列夫 (С. Л. Соболев) 联系于嵌入定理发展起来的[50]．索波列夫和其他作者証明了当数 λ,α 和空間的維数 n 滿足一定关系时，場位型算子映空間 L^α 到确定的空間 L^{α_1} 或連續函数的空間 C 内． 特別，当 $\lambda=\frac{n}{2}$ 时，根据索波列夫定理，場位型算子映空間 L^2 到任意的空間 $L^{\alpha_1}(\alpha_1>1)$ 内．

利用关于綫性算子分解的定理，上述結論可以得到加強.

設 $\mathbf{A}$ 是映 L^2 到它自己內的綫性积分算子，它的核对称且滿足条件(16.13)，其中 $\lambda = \frac{n}{2}$，則 $\mathbf{A}^2$ 同样是綫性积分算子，其核为

$$k_2(x, y) = \int_G k(x, z)k(z, y)dz.$$

利用条件(16.13)直接計算之可得

$$|k_2(x, y)| \leqslant b + c|\ln|r||. \qquad (16.14)$$

因而 $k_2(x, y) \in \hat{L}^*_\Psi$，其中 $\Psi(u) = e^{|u|} - |u| - 1$.

由定理 15.4 可知，核 $k_2(x, y)$ 所定义的算子 $\bar{\mathbf{A}}^2$ 映空間 $E_\Phi = L^*_\Phi$ 到 L^*_Ψ 內并且連續，其中 $\Phi(u) = (1+|u|)\ln(1+|u|) - |u|$. 又 $\bar{\mathbf{A}}^2$ 是算子 $\mathbf{A}^2$ 的連續扩张，于是应用定理 15.5 便知 $\mathbf{A} \in \{L^2 \to L^*_\Psi;\ \text{н.}\}$.

設 $\Psi_1(u) = |u|(e^{|u|^{1-\varepsilon}} - 1)$，其中 $0 < \varepsilon < 1$. 不难看出，$\Psi_1(u)$ 滿足 Δ^2-条件. 因此余函数 $\Phi_1(u)$ 滿足 Δ'-条件. 又上面所构成的核 $k_2(x, y)$ 属于空間 $\hat{E}_{\Psi_1}$，因为

$$\iint\limits_{\hat{G}} \Psi_1\{|k_2(x, y)|^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\}dx\,dy < \infty.$$

由定理 16.1，算子 $\bar{\mathbf{A}}^2$ 映 $E_{\Phi_1} = L^*_{\Phi_1}$ 到 $L^*_{\Psi_1}$ 內. 再应用定理 16.7 便知 $\mathbf{A} \in \{L^2 \to L^*_{\Psi_1};\ \text{вп. н.}\}$.

由此可見，下列定理成立.

定理 16.9. 設对称核 $k(x, y)$ 滿足条件(16.13)，其中 $\lambda = \frac{n}{2}$，則核 $k(x, y)$ 所定义的綫性积分算子 $\mathbf{A}$ 映 L^2 到 L^*_Ψ 內并且連續，其中 $\Psi(u) = e^{|u|} - |u| - 1$，而且又可看成是映 L^2 到 $L^*_{\Psi_1}$ 內的全連續算子，其中 $\Psi_1(u) = |u|(e^{|u|^{1-\varepsilon}} - 1)(0 < \varepsilon < 1)$.

大家知道，拉普拉斯算子（对齐性边界条件）的格林函数对四維区域滿足不等式

$$|k(x, y)| \leqslant \frac{a}{r^2}.$$

我們得到定理 16.9 的条件. 因而在四維区域的情况下，格林

函数所产生的綫性积分算子属于 $\{L^2 \to L^*_{\Psi};$ н.$\}$ 和 $\{L^2 \to L^*_{\Psi_1};$ вп. н.$\}$，其中 $\Psi(u)$ 和 $\Psi_1(u)$ 是上面所定义的 N-函数.

再注意这样一个事实：拉普拉斯算子的格林函数对二維区域满足条件

$$|k(x, y)| < b + c|\ln|r||.$$

于是从定理 15.6 可推出，由該格林函数所定义的綫性算子 $\mathbf{A}$ 能够分解成 $\mathbf{A} = \mathbf{HH}^*$，其中 $\mathbf{H} \in \{L^2 \to L^*_{\Psi};$ н.$\}$，而 $\mathbf{H}^*$ 是 $\{E_\Phi \to \to L^2;$ н.$\}$ 中的共軛算子.

从定理 16.8 又可推出类似的表达式 $\mathbf{A} = \mathbf{HH}^*$，其中 $\mathbf{H} \in \{L^2 \to L^*_{\Psi_1};$ вп. н.$\}$，$\mathbf{H}^* \in \{E_{\Phi_1} \to L^2;$ вп. н.$\}$.

在上述的两个結論中，N-函数 $\Psi(u)$ 和 $\Psi_1(u)$ 是定理 16.9 的叙述中所指出的函数.

§ 17. 最簡单的非綫性算子

1. 卡拉太屋独里条件. 我們称两个变量 $x \in G, -\infty < u < \infty$ 的实值函数 $f(x, u)$ 滿足卡拉太屋独里条件，假如它对几乎所有的 $x \in G$ 关于 u 連續，并且对每一个确定的 u 关于 x 可测.

我們有下列定理.

定理 17.1. 函数 $f(x, u)$ 滿足卡拉太屋独里条件当且仅当对任何 $\varepsilon > 0$，可找到閉集 $G_0 \subset G$，使得 $\mathrm{mes}(G \setminus G_0) < \varepsilon$ 并且在集合 $G_0 \times (-\infty, \infty)$ 上函数 $f(x, u)$ 关于两个变量連續.

定理条件的充分性是明显的. 必要性的証明参看[23]、[21в].

以 $\mathfrak{f}$ 表示由等式

$$\mathfrak{f}u(x) = f[x, u(x)] \tag{17.1}$$

所确定的算子，它定义在所有实值函数 $u(x)(x \in G)$ 的集合上.

若滿足卡拉太屋独里条件，則由定理 17.1，算子 $\mathfrak{f}$ 变可测函数为可测函数，而依測度收斂的函数列仍变为依測度收斂的函数列.

今后在研究公式 (17.1) 所确定的算子时，我們常常假定相应的函数滿足卡拉太屋独里条件.

2. 算子 $\mathfrak{f}$ 的定义域. 我們記得，記号 $\Pi(E_M, r)$ 表示所有滿

足 $d(u, E_M) < r$ 的函数 $u(x) \in L_M^*$ 的集合（见 79 頁）。以 $T(u, r; E)$ 表示中心在巴拿哈空間 E 內的点 u 而半径为 r 的球。

引理 17.1. 設

$$f_1(x, 0) \equiv 0 \quad (x \in G). \tag{17.2}$$

又設算子 f_1 映某个球 $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ 到空間 $L_{M_2}^*$，类 L_{M_2} 或 E_{M_2} 內。則算子 f_1 相应地映 $\Pi(E_{M_1}, r)$ 到空間 $L_{M_2}^*$，类 L_{M_2} 或 E_{M_2} 內。

若算子 f_1 映球 $T(\theta, r; E_{M_1})$ 到 $L_{M_2}^*$，L_{M_2} 或 E_{M_2} 內，則它相应地映整个 E_{M_1} 到 $L_{M_2}^*$，L_{M_2} 或 E_{M_2} 內。

証. 假定 $u(x) \in \Pi(E_{M_1}, r)$，則由引理 10.1 可找到集合 $G_0 \subset G$ 使得 $u(x)\kappa(x; G_0) \in E_{M_1}$ 并且 $\|u_0\|_{M_1} < r$，其中 $u_0(x) = u(x)\kappa(x; G \setminus G_0)$。因函数 $u(x)\kappa(x; G_0)$ 有絕对連續的范数，故函数 $u(x)$ 可以写成

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_k(x),$$

其中 $\|u_i\|_{M_1} < r (i = 0, 1, \cdots, k)$，并且当 $i \neq j$ 时

$$u_i(x) u_j(x) = 0 \quad (x \in G).$$

由(17.2)有

$$f_1 u_i(x) f_1 u_j(x) = 0 \quad (x \in G, i \neq j) \tag{17.3}$$

和

$$f_1 u(x) = f_1 u_0(x) + f_1 u_1(x) + \cdots + f_1 u_k(x). \tag{17.4}$$

若 $f_1 T(\theta, r; L_{M_1}^*) \subset L_{M_2}^*$，則公式(17.4)右端的每一項均为 $L_{M_2}^*$ 的函数，从而 $f_1 u(x)$ 屬于 $L_{M_2}^*$。

若 $f_1 T(\theta, r; L_{M_1}^*) \subset L_{M_2}$，則由(17.3)

$$\int_G M_2[f_1 u(x)]\,dx = \sum_{i=0}^{k} \int_G M_2[f_1 u_i(x)]\,dx < \infty,$$

即 $f_1 u(x) \in L_{M_2}$。

若 $f_1 T(\theta, r; L_{M_1}^*) \subset E_{M_2}$，則(17.4)右端的一切項均为 E_{M_2} 的函数，从而 $f_1 u(x) \in E_{M_2}$。

最后，假如将 f_1 看成是仅定义在 E_{M_1} 上的算子，那末 $u_0(x) \equiv 0$，于是从 $f_1 T(\theta, r; E_{M_1}) \subset L_{M_2}^*$ 可推出 (17.4) 右端的一切項均屬于 $L_{M_2}^*$，从而 $f_1 u(x) \in L_{M_2}^*$。

其余的情形可以相似地討論之.

引理証毕.

假設 N-函数 $M_1(u)$ 满足 Δ_2-条件,则从引理 17.1 可推出算子 $\mathfrak{f}_1$ 定义在整个空間 $L^*_{M_1}=L_{M_1}=E_{M_1}$ 上,假如它定义在該空間的任意一个球上. 自然提出这样的問題,即当 $M_1(u)$ 不满足 Δ_2-条件时,上述事实是否仍成立. 今証这是不可能的.

事实上,假如 $M_1(u)$ 不满足 Δ_2-条件,则算子

$$\mathfrak{f}_1u(x)=M_2^{-1}\{M_1[u(x)]\} \tag{17.5}$$

映空間 $L^*_{M_1}$ 的单位球到 L_{M_2} 内,因为当 $\|u\|_{M_1}\leqslant 1$ 时

$$\int_G M_2[\mathfrak{f}_1u(x)]\,dx=\int_G M_1[u(x)]dx\leqslant\|u\|_{M_1}\leqslant 1.$$

但在任何半径 $r>1$ 的球内可选出函数 $u(x)$ 使得 $\mathfrak{f}_1u(x)\,\overline{\in}\,L_{M_2}$,为此只須选函数 $u(x)$ 不属于 L_{M_1} 且具有范数 $\|u\|_{M_1}<r$.

假如 N-函数 $M_2(u)$ 满足 Δ_2-条件,则算子 (17.5) 映空間 $L^*_{M_1}$ 的单位球到 $L^*_{M_2}$, L_{M_2}, 和 E_{M_2} 内,因为 $L^*_{M_2}=L_{M_2}=E_{M_2}$. 但是并非在半径較大的球上它的值也都属于 $L^*_{M_2}$.

定理 17.2. 設算子 $\mathfrak{f}$ 映某个球 $T(\theta,r;L^*_{M_1})$ 到空間 $L^*_{M_2}$ 或空間 E_{M_2} 内,则算子 $\mathfrak{f}$ 相应地映 $\Pi(E_{M_1},r)$ 到空間 $L^*_{M_2}$ 或空間 E_{M_2} 内.

若算子 $\mathfrak{f}$ 映球 $T(\theta,r;E_{M_1})$ 到 $L^*_{M_2}$ 或 E_{M_2} 内,则它相应地映整个 E_{M_1} 到 $L^*_{M_2}$ 或 E_{M_2} 内.

証. 因函数 $f_1(x,u)=f(x,u)-f(x,0)$ 满足条件 (17.2),故对算子 $\mathfrak{f}_1u(x)=f_1[x,u(x)]$ 可以应用引理 17.1,由此即可推出定理的結論.

3. 关于連續性的定理. 映巴拿哈空間 E_1 到巴拿哈空間 E_2 内的非綫性算子 $\mathbf{B}$ 称为在点 $u_0\in E_1$ 处連續,假如

$$\lim_{\substack{u\in E_1\\ \|u-u_0\|_{E_1}\to 0}}\|\mathbf{B}u-\mathbf{B}u_0\|_{E_2}=0.$$

与綫性算子不同,对于非綫性算子来說,从在一点的連續性推不出在其它点的連續性. 一般来說,非綫性算子可以只定义在空

間 E_1 的子集上，这一点通过算子 $\mathfrak{f}$ 的例子我們已經看到.

非綫性算子 $\mathbf{B}$ 称为在空間 E_1 的球 T 上有界，假如

$$\sup_{u\in T}\|\mathbf{B}u\|_{E_2}<\infty.$$

与綫性算子不同，非綫性算子的有界性和連續性概念互不相干：存在有界的不連續算子，反之又存在整个空間上的連續算子，它在某球上无界.

今后我們需要文献[21л, 31, 35, 36 頁]中的下列結論:

引理 17.2. 設算子 $\mathbf{g}$ 映可求和函数的空間 L 到它自己內，則算子 $\mathbf{g}$ 按空間 L 的范数連續并且有界，同时函数 $g(x,u)$ 滿足条件

$$|g(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|\quad(x\in G,\ -\infty<u<\infty),$$

其中 $a(x)\in L$，而 b 是某一正数.

定理 17.3. 設算子 $\mathfrak{f}$ 映 $\Pi(E_{M_1},r)$ 到 E_{M_2} 內，則算子 $\mathfrak{f}$ 在 $\Pi(E_{M_1},r)$ 的每一点連續.

証. 首先在 $\mathfrak{f}\theta=\theta$ 的假定下来証明算子 $\mathfrak{f}$ 在空間 $L^*_{M_1}$ 的零点 θ 連續. 如若不然，則存在函数列 $u_n(x)\in L^*_{M_1}(n=1,2,\cdots)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{M_1}=0,\tag{17.6}$$

而

$$\|\mathfrak{f}u_n\|_{M_2}>\alpha\quad(n=1,2,\cdots),\tag{17.7}$$

其中 α 是某一正数. 由引理 9.2 从(17.6)可推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_G M_1\left[\frac{2}{r}u_n(x)\right]dx=0.\tag{17.8}$$

又从(17.7)可推出

$$\int_G M_2\left[\frac{2}{\alpha}\mathfrak{f}u_n(x)\right]dx\geqslant\left\|\frac{2}{\alpha}\mathfrak{f}u_n\right\|_{M_2}-1>1.\tag{17.9}$$

由此可見，假如算子 $\mathfrak{f}$ 在零点不連續，則存在函数列 $u_n(x)\in$ $\in L^*_{M_1}$，使得关系式(17.8)和(17.9)同时成立.

現在考慮由公式

$$\mathbf{g}u(x) = M_2\left\{\frac{2}{\alpha}\,\mathfrak{f}\left(\frac{r}{2}M_1^{-1}[u(x)]\right)\right\}$$

所定义的算子 $\mathbf{g}$.

如果 $u(x)$ 是可求和函数，那末 $M_1^{-1}[u(x)] \in L_{M_1}$. 由定理 10.1, $M_1^{-1}[u(x)] \in \Pi\left(E_{M_1}, \frac{3}{2}\right)$. 因此

$$\frac{r}{2}M_1^{-1}[u(x)] \in \Pi\left(E_{M_1}, \frac{3}{4}r\right).$$

根据定理的条件

$$\mathfrak{f}\left(\frac{r}{2}M_1^{-1}[u(x)]\right) \in E_{M_2}.$$

換言之 $\mathbf{g}u(x) \in L$. 由引理 17.2, 映 L 到它自己内的算子 $\mathbf{g}$ 在零点連續. 因此从(17.8)可推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_G \mathbf{g}\left\{M_1\left[\frac{2}{r}u_n(x)\right]\right\}dx = \lim_{n\to\infty}\int_G M_2\left[\frac{2}{\alpha}\mathfrak{f}u_n(x)\right]dx = 0.$$

这与(17.9)发生矛盾.

換言之,算子 $\mathfrak{f}$ 在空間 $L_{M_1}^*$ 的零点連續,假如 $\mathfrak{f}\theta = \theta$.

让我們轉到一般的情形. 不附加其它的假設来証明算子 $\mathfrak{f}$ 在集合 $\Pi(E_{M_1}, r)$ 的任意点 $u_0(x)$ 連續. 設 $d = d(u_0, E_{M_1})$, 显然 $d < r$. 算子 $\mathfrak{f}$ 在点 $u_0(x)$ 的連續性等价于算子

$$\mathfrak{f}_1 u(x) = \mathfrak{f}[u_0(x) + u(x)] - \mathfrak{f}u_0(x)$$

在空間 $L_{M_1}^*$ 的零点的連續性. 算子 $\mathfrak{f}_1$ 映球 $T(\theta, r-d;\ L_{M_1}^*)$ 到 E_{M_2} 内. 由定理 17.2,它映 $\Pi(E_{M_1}, r-d)$ 到 E_{M_2} 内. 因为 $\mathfrak{f}_1\theta=\theta$, 則根据已經証明的結果可知,算子 $\mathfrak{f}_1$ 在 $L_{M_1}^*$ 的零点連續.

定理証毕.

注意定理 17.3 只給出算子 $\mathfrak{f}$ 連續性的粗糙的判别法. 譬如, 甚至从它推不出映空間 L_M^* 到它自己内的恆等算子($\mathfrak{f}u(x)=u(x)$)的連續性,假如 $M(u)$ 不滿足 Δ_2-条件.

若在定理 17.3 的条件中 N-函数 $M_2(u)$ 滿足 Δ_2-条件,則此定理表明算子 $\mathfrak{f}$ 連續,假如它映 $\Pi(E_{M_1}, r)$ 到空間 $L_{M_2}^* = L_{M_2} = E_{M_2}$ 内. 自然提出这样的問題, 即算子 $\mathfrak{f}$ 是否一定連續, 假如它映

$\Pi(E_{M_1}, r)$ 到空間 $L^*_{M_2}$ 内，而 $M_2(u)$ 不滿足 Δ_2-条件．今証算子 $\mathfrak{f}$ 未必一定連續．詌我們引入下面的例子．

設

$$\mathfrak{f}u(x) = M_2^{-1}\{M_1[u(x)]\}, \tag{17.10}$$

其中 $M_1(u)$ 滿足 Δ_2-条件，而 $M_2(u)$ 不滿足 Δ_2-条件．显然 $\mathfrak{f}$ 映 $\Pi(E_M, 1) = L_{M_1}$ 到 L_{M_2} 内．設 $v(x)$ 屬于 L_{M_2}，但不屬于 E_{M_2}，則由引理 10.1

$$\lim_{n\to\infty}\|v - v_n\|_{M_2} = d(v, E_{M_2}) = d > 0, \tag{17.11}$$

其中

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), & 当\ |v(x)| \leqslant n\ 时, \\ 0, & 当\ |v(x)| > n\ 时. \end{cases} \tag{17.12}$$

因函数

$$u_n(x) = M_1^{-1}\{M_2[v(x) - v_n(x)]\}$$

屬于 L_{M_1}，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_G M_1[u_n(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\int_G M_2[v(x) - v_n(x)]dx = 0,$$

又因在 L_{M_1} 中平均收斂与按范数收斂等价，故

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{M_1} = 0.$$

从上述等式和 (17.11) 可推出算子 $\mathfrak{f}$ 在空間 $L^*_{M_1}$ 的零点不連續，因为 $\mathfrak{f}u_n(x) = v(x) - v_n(x)$．

4. 算子 $\mathfrak{f}$ 的有界性． 算子 $\mathfrak{f}$ 在空間 $L^*_{M_1}$ 的球的值域上的有界性，可以在較算子 $\mathfrak{f}$ 的連續性的定理 17.3 更少的限制下得到証明．

定理 17.4． 設算子 $\mathfrak{f}$ 映球 $T(\theta, r; L^*_{M_1})$ 到类 L_{M_2} 内，則算子 $\mathfrak{f}$ 在任何球 $T(\theta, r_1; L^*_{M_1})$ $(r_1 < r)$ 上有界：

$$\sup_{\|u\|_{M_1} < r_1} \|\mathfrak{f}u\|_{M_2} < \infty.$$

証． 因由引理 17.1，算子 $\frac{\mathfrak{f}u(x) - \mathfrak{f}\theta}{2}$ 映 $\Pi(E_{M_1}, r)$ 到类 L_{M_2} 内，故算子

$$\mathbf{g}v(x) = M_2\left\{\frac{1}{2}\mathfrak{f}(r_1 M_1^{-1}[v(x)]) - \frac{1}{2}\mathfrak{f}\theta\right\}$$

映L到L内.

因对函数 $u(x) \in T(\theta, r_1; L^*_{M_1})$ 有

$$\int_G M_1\left[\frac{u(x)}{r_1}\right] dx \leqslant 1,$$

故由引理 17.2

$$\sup_{\|u\|_{M_1}<r_1} \int_G \mathbf{g}\left\{M_1\left[\frac{u(x)}{r_1}\right]\right\} dx < \infty,$$

即

$$\sup_{\|u\|_{M_1}<r_1} \int_G M_2\left[\frac{1}{2}\,\mathfrak{f}u(x) - \frac{1}{2}\,\mathfrak{f}\theta\right] dx < \infty.$$

因而

$$\sup_{\|u\|_{M_1}<r_1} \|\mathfrak{f}u\|_{M_2} \leqslant \|\mathfrak{f}\theta\|_{M_2} + \sup_{\|u\|_{M_1}<r_1} \|\mathfrak{f}u - \mathfrak{f}\theta\|_{M_2} \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathfrak{f}\theta\|_{M_2} + 2\left(1 + \sup_{\|u\|_{M_1}<r_1} \int_G M_2\left[\frac{1}{2}\,\mathfrak{f}u(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\,\mathfrak{f}\theta\right] dx\right) < \infty.$$

定理証毕.

自然提出这样的問題，即算子 $\mathfrak{f}$ 是否在半径更大的球上有界. 看来未必如此. 作为例子，我們重新考虑算子 (17.10)，并且假定 $M_1(u)$ 不满足 Δ_2-条件，而 $M_2(u)$ 满足 Δ_2-条件.

因算子(17.10)映类 L_{M_1} 到 $L_{M_2} = E_{M_2}$ 内，故由定理 17.3，它在 E_{M_1} 上連續. 今証該算子 $\mathfrak{f}$ 的値在每一个球 $T(\theta, 1+\varepsilon; E_{M_1})$ 上无界，其中 ε 是任意正数. 因为 $M_2(u)$ 满足 Δ_2-条件，所以按范数有界等价于平均有界，于是只須証存在函数列 $u_n(x) \in T(\theta, 1+\varepsilon; E_{M_1})$ 使得

$$\sup_{\|u_n\|_{M_1}<1+\varepsilon} \int_G M_2[\mathfrak{f}u_n(x)]dx =$$

$$= \sup_{\|u_n\|_{M_1}<1+\varepsilon} \int_G M_1[u_n(x)]dx = \infty. \qquad (17.13)$$

設函数 $u_n(x)$ 是由等式(17.12)所定义的函数，其中 $u(x)$ 是这样的函数，它不属于 L_{M_1}，并且使得 $\|u\|_{M_1} < 1 + \varepsilon$. 从定理 10.1

可推出如此的函数 $u(x)$ 是存在的. 如果对函数 $u_n(x)$ 关系式(17.13)不满足,则由法都定理(見 69 頁),函数 $u(x)$ 属于 L_{M_1}.

5. 算子 $\mathfrak{f}$ 的一般形式.

定理 17.5. 算子 $\mathfrak{f}$ 映类 L_{M_1} 到类 L_{M_2} 内当且仅当

$$M_2[f(x, u)] \leqslant a(x) + bM_1(u)$$
$$(x \in G, -\infty < u < \infty), \qquad (17.14)$$

其中 $a(x) \in L$, $b \geqslant 0$.

証. 若算子 $\mathfrak{f}$ 映 L_{M_1} 到 L_{M_2} 内,則算子

$$\mathbf{g}v(x) = M_2\{\mathfrak{f}(M_1^{-1}[v(x)])\}$$

映 L 到它自己内,于是由引理 17.2

$$M_2\{f[x, M_1^{-1}(v)]\} \leqslant a(x) + b|v|,$$

在此不等式中命 $v = M_1(u)$ 即得(17.14).

条件(17.14)的充分性是明显的.

定理証毕.

假定条件(17.14)满足,則由(1.20)

$$|f(x, u)| \leqslant c(x) + b_1 M_2^{-1}[M_1(u)]$$
$$(x \in G, -\infty < u < \infty), \qquad (17.15)$$

其中 $c(x) = M_2^{-1}[a(x)] \in L_{M_2}$. 由此可見,条件(17.15)是算子 $\mathfrak{f}$ 映 L_{M_1} 到 L_{M_2} 内的必要条件. 当 N-函数 $M_2(u)$ 满足 Δ_2-条件时,条件(17.15)同时还是充分的,因为此时从(17.15)可推出(17.14).

6. 算子 $\mathfrak{f}$ 連續性和有界性的充分条件. 从上述已証的結論可推出

定理 17.6. 設函数 $f(x, u)$ 满足不等式

$$|f(x, u)| \leqslant c(x) + b_1 M_2^{-1}\left[M_1\left(\frac{u}{r}\right)\right]$$
$$(x \in G, -\infty < u < \infty), \qquad (17.16)$$

其中 $c(x) \in L_{M_2}$, $b_1 \geqslant 0$, 并且 N-函数 $M_2(u)$ 满足 Δ_2-条件. 則算子 $\mathfrak{f}$ 映 $\Pi(E_{M_1}, r)$ 到空間 $L_{M_2}^* = E_{M_2}$ 内, 在 $\Pi(E_{M_1}, r)$ 的一切点連續并且在每一个球 $T(\theta, r_1; L_{M_1}^*)$ $(r_1 < r)$ 上有界.

若 N-函数 $M_2(u)$ 不满足 Δ_2-条件, 則为了保証算子 $\mathfrak{f}$ 的連續

性就需要要求它的值域属于 E_{M_2}，因此对函数 $f(x, u)$ 也就需要加上更強的限制.

定理 17.7. 設函数 $f(x, u)$ 满足不等式

$$|f(x, u)| \leqslant b(x) + aQ^{-1}\left\{M_2^{-1}\left[M_1\left(\frac{u}{r}\right)\right]\right\}$$

$$(x \in G, -\infty < u < \infty), \qquad (17.17)$$

其中 $b(x) \in E_{M_2}$，$Q(u)$ 是某一 N-函数，a，r 是正数. 則算子 f 映 $\Pi(E_{M_1}, r)$ 到 E_{M_2} 内，在 $\Pi(E_{M_1}, r)$ 的一切点連續并且在每一个球 $T(\theta, r_1; L_{M_1}^*)$ 上有界.

7. 算子 f 与 E_N-弱收斂性. 算子 f 的連續性我們是在它映球 $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ 到 E_{M_2} 内的假定下証明的，而算子 f 的有界性是在更弱的假定下建立的. 让我們在这种更弱的假定下来証明算子 f 的某种較弱意义的連續性.

定理 17.8. 設算子 f 映球 $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ 到类 L_{M_2} 内，則此算子变按空間 $L_{M_1}^*$ 的范数收斂于这个球的内点 $u_0(x)$ 的函数列 $u_n(x) \in T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ 为在空間 $L_{M_2}^*$ 内 E_{N_2}-弱收斂于函数 f$u_0(x)$ 的函数列 f$u_n(x)$.

証. 因为函数列 $u_n(x)$ 按范数收斂于 $u_0(x)$，則它依測度收斂于該函数，所以函数列 f$u_n(x)$ 依測度收斂于函数列 f$u_0(x)$. 由于函数 $u_0(x)$ 是球 $T(\theta, r; L_{M_1}^*)$ 的内点，則不失普遍性，可以認为所有 $u_n(x) \in T(\theta, r_1; L_{M_1}^*)$，其中 $r_1 < r$. 故从定理 17.4 可推出函数列 f$u_n(x)$ 的范数一致有界. 于是由定理 14.6，該函数列 E_{N_2}-弱收斂于函数 f$u_0(x)$.

定理証毕.

§ 18. 可微性. 范数的梯度

1. 可微泛函. 我們将考慮給定在奥尔里奇空間 L_M^* 上（或在此空間的子集上）的实值泛函.

我們称泛函 $\mathbf{F}(u)$ 在它的定义域中的内点 $u_0(x)$ 处可微，假如它的改变量可以写成

$$\mathbf{F}(u_0+h)-\mathbf{F}(u_0)=\boldsymbol{l}_{u_0}(h)+\omega(u_0, h), \tag{18.1}$$

其中 $\boldsymbol{l}_{u_0}(h)$ 是 L_M^* 上的綫性泛函，而余項 $\omega(u_0, h)$ 滿足条件

$$\lim_{\|h\|_M\to 0}\frac{\omega(u_0, h)}{\|h\|_M}=0. \tag{18.2}$$

又称泛函 $\mathbf{F}(u)$ 在集合 $\mathfrak{M}$ 上可微，假如它在集合 $\mathfrak{M}$ 的每一点可微.

变元素 $u_0(x)\in\mathfrak{M}$ 为泛函 $\boldsymbol{l}_{u_0}$ 的算子 $\boldsymbol{\Gamma}$ 称为泛函 $\mathbf{F}(u)$ 的梯度. 梯度映空間 L_M^* 到共軛空間內. 空間 L_N^* 可以看成共軛空間的子集，其中 $N(v)$ 是 $M(u)$ 的余 N-函数. 假如梯度映到 L_N^* 內，則等式(18.1)可以改写成

$$\mathbf{F}(u_0+h)-\mathbf{F}(u_0)=(\boldsymbol{\Gamma}u_0, h)+\omega(u_0, h), \tag{18.3}$$

其中符号 (w, h) 和平常一样表示內积

$$(w, h)=\int_G w(x)h(x)dx(w(x)\in L_N^*, h(x)\in L_M^*).$$

变函数 $u_0(x)$ 为函数 $\boldsymbol{\Gamma}u_0(x)$ 的算子仍保持梯度的名称.

2. 函数 $\theta(x)$ 的可測性. 設函数 $F(x, u)$ $(x\in G, -\infty<u<\infty)$ 滿足卡拉太屋独里条件并且关于 u 有連續的导数 $F_u'(x, u)$. 显然，函数 $F_u'(x, u)$ 也滿足卡拉太屋独里条件.

設 $u(x)$ 是某一在 G 上可測的函数，則从有限改变量公式可推出，存在函数 $\theta(x)$ 使得

$$F(x, u(x))-F(x, 0)=u(x)F_u'(x, \theta(x)u(x)). \tag{18.4}$$

一般来說，函数 $\theta(x)$ 不是唯一确定的. 下面将要利用如下的結論.

引理 18.1. 存在滿足不等式

$$0\leqslant\theta(x)\leqslant 1 \tag{18.5}$$

的可測函数 $\theta(x)$，使得等式(18.4)成立.

証. 函数 $\theta(x)$ 对每一个 $x\in G$ 定义为滿足等式

$$F(x, u(x))-F(x, 0)=u(x)F_u'(x, \theta u(x))$$

的 $\theta\in[0, 1]$ 的最小值. 該最小值存在，因为 $F_u'(x, u)$ 关于 u 連續.

假設給定 $\varepsilon > 0$，則由魯金（Н. Н. Лузин）的 C-性質和定理 17.1 可选出集合 $G_1 \subset G$，使得 $\operatorname{mes}(G \setminus G_1) < \varepsilon$ 并且函数 $F'_u(x, u)$，$F(x, 0)$，$F(x, u)$ 和 $u(x)$ 当 $x \in G_1$，$-\infty < u < \infty$ 时对一切变量連續. 因 ε 任意，故只須証函数 $\theta(x)$ 在 G_1 上可測.

設 $x_0 \in G_1$，$x_n \in G_1 (n = 1, 2, \cdots)$ 并且

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \to \infty} \theta(x_n) = \theta_0.$$

在等式

$$F(x_n, u(x_n)) - F(x_n, 0) = u(x_n) F'_u(x_n, \theta(x_n) u(x_n))$$

的两边取极限，得到

$$F(x_0, u(x_0)) - F(x_0, 0) = u(x_0) F'_u(x_0, \theta_0 u(x_0)).$$

从上述等式可推出

$$\theta(x_0) \leqslant \theta_0.$$

換言之，函数 $\theta(x)$ 在 G_1 上下半連續，因而可測.

引理証毕.

3. 算子 $\mathfrak{f}$ 的泛函. 讓我們来研究泛函

$$\mathbf{F}_1(u) = \int_G dx \int_0^{u(x)} f(x, s) ds. \tag{18.6}$$

我們有兴趣的情况是泛函 $\mathbf{F}_1(u)$ 定义在空間 L^*_M 的子集上，而 L^*_M 又是 L^2 的子集. 此时 N-函数 $M(u)$ 与其余 N-函数 $N(v)$ 有关系式 $N(u) \prec u^2 \prec M(u)$. 因为 $N(u)$ 的增加速度不快于 u^2，則在大多数情况下它滿足 Δ_2-条件. 今在此假設下来証明下列定理.

定理 18.1. 設算子 $\mathfrak{f}$ 映 $\Pi(E_M, r)$ 到 $L^*_N = L_N$ 内，則泛函 (18.6) 在 $\Pi(E_M, r)$ 上有定义并且可微，同时它的梯度就是算子 $\mathfrak{f}$.

証. 設 $u(x) \in \Pi(E_M, r)$，則由引理 18.1 可找到滿足条件 (18.5) 的可測函数 $\theta(x)$ 使得

$$\mathbf{F}_1(u) = \int_G dx \int_0^{u(x)} f(x, s) ds = \int_G f[x, \theta(x) u(x)] u(x) dx.$$

显然 $\theta(x) u(x) \in \Pi(E_M, r)$. 因此 $f[x, \theta(x) u(x)] \in L^*_N$. 于

是

$$|\mathbf{F}_1(u)| \leqslant \|\mathfrak{f}\theta u\|_N \|u\|_M < \infty,$$

从而即可推出泛函 $\mathbf{F}_1(u)$ 在 $\Pi(E_M, r)$ 上有定义.

由同一个引理可知，对每一个适合 $\|h\|_M < r - d(u, E_M)$ 的函数 $h(x) \in L_M^*$ 相应的有满足条件(18.5)的可测函数 $\theta_h(x)$ 使得

$$|\mathbf{F}_1(u + h) - \mathbf{F}_1(u) - (\mathfrak{f}u, h)| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_G [f(x, u(x) + \theta_h(x)h(x)) - \right.$$
$$\left. - f(x, u(x))] h(x) dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathfrak{f}(u + \theta_h h) - \mathfrak{f}u\|_N \|h\|_M.$$

从上述不等式和 $\mathfrak{f}$ 的連續性（定理 17.3）立即推出 $\mathfrak{f}$ 是泛函 $\mathbf{F}_1(u)$ 的梯度.

定理証毕.

4. 綫性算子 $\mathfrak{f}$. 最簡单的算子 $\mathfrak{f}$ 中的一种是綫性算子 $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{f}u(x) = a(x)u(x), \tag{18.7}$$

其中 $a(x)$ 是某一确定的函数. 这种算子实际上我們已經在 § 13 (第 4 和 5 段)研究过.

若函数 $a(x)$ 有界，則易見算子 $\mathfrak{f}$ 映每一个奥尔里奇空間到它自己內并且連續.

从定理 13.7 和 13.8 以及不等式(13.19)和(13.27)可推出下列結論:

定理 18.2. 設 $a(x) \in L_\Phi^*$, 則算子(18.7)映 $L_{M_1}^*$ 到 $L_{M_2}^*$ 內并且連續，只要存在互余 N-函数 $R(u)$ 和 $Q(u)$ 使得对自变量較大的值

$$R(u) < M_2^{-1}[M_1(\alpha u)],\ Q(u) < M_2^{-1}[\Phi(\alpha u)] \tag{18.8}$$

或者 N-函数 $M_2(u)$ 满足 Δ'-条件并且

$$R(u) < M_1[M_2^{-1}(\alpha u)],\ Q(u) < \Phi[M_2^{-1}(\alpha u)]. \tag{18.9}$$

在这些条件下

$$\|au\|_{M_2} \leqslant k\|a\|_\Phi \|u\|_{M_1},$$

其中常数 k 不依賴于函数 $u(x)$.

在上述定理的条件中 α 是某一正数.

5. 弗力許导数. 設非綫性算子 $\mathbf{A}$ 映巴拿哈空間 E 到巴拿哈空間 E_1 内. 我們称綫性算子 $\mathbf{B}$ 是算子 $\mathbf{A}$ 在点 $u_0 \in E$ 的弗力許导数,假如

$$\mathbf{A}(u_0 + h) - \mathbf{A}u_0 = \mathbf{B}h + \omega(u_0, h),$$

其中

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|\omega(u_0, h)\|_{E_1}}{\|h\|_E} = 0.$$

此时綫性算子 $\mathbf{B}$ 同样映空間 E 到空間 E_1 内.

表达式 $\mathbf{B}h$ 称为弗力許微分.

具有弗力許导数的算子称为可微的. 若算子在某一集合上可微,則易見它在該集合上連續.

定理 18.3. 設函数 $f(x, u)$ 滿足卡拉太屋独里条件并且关于 u 有連續的导数 $f'_u(x, u)$. 又設算子 $\mathfrak{f}$ 映某个球 $T(u_0, r; L^*_{M_1})$ 到空間 $L^*_{M_2}$ 内,而算子

$$\mathfrak{f}_1 u(x) = \mathfrak{f}'_u(x, u(x)) \tag{18.10}$$

映球 $T(u_0, r, L^*_{M_1})$ 到空間 L^*_Φ 内并且連續. 最后再設函数 $M_1(u)$, $M_2(u)$ 和 $\Phi(u)$ 滿足条件(18.8)或(18.9).

則算子 $\mathfrak{f}$ 在球 $T(u_0, r, L^*_{M_1})$ 的每一个内点处按弗力許意义可微并且它的弗力許微分 $\mathbf{B}h$ 在点 $u(x) \in T$ 由下列等式确定:

$$\mathbf{B}h(x) = \mathfrak{f}_1 u(x) h(x) \quad (h(x) \in L^*_{M_1}).$$

證. 由有限改变量公式

$$f[x, u(x) + h(x)] - f[x, u(x)] - f'_u[x, u(x)]h(x) =$$
$$= \{f'_u[x, u(x) + \theta_h(x)h(x)] - f'_u[x, u(x)]\}h(x), \tag{18.11}$$

其中 $0 \leqslant \theta_h(x) \leqslant 1$, 并且由引理 18.1 可以認为函数 $\theta_h(x)$ 是可測的.

設 $h(x) \in L^*_{M_1}$ 且 $\|h\|_{M_1}$ 充分小, 則函数 $u(x) + h(x)$ 和 $u(x) + \theta_h(x)h(x)$ 屬于球 $T(u_0, r; L^*_{M_1})$. 由定理 18.2 $f'_u[x, u(x)]h(x)$ 和等式(18.11)右端的一切項都屬于空間 $L^*_{M_2}$. 又从該定理可推出

$$\|\mathfrak{f}(u+h)-\mathfrak{f}u-\mathfrak{f}_1 u\cdot h\|_{M_2}\leqslant k\|\mathfrak{f}_1(u+\theta_h h)-\mathfrak{f}_1 u\|_\Phi\|h\|_{M_1}.$$

从而由 $\mathfrak{f}_1$ 的連續性即可推出

$$\lim_{\|h\|_{M_1}\to 0}\frac{\|\mathfrak{f}(u+h)-\mathfrak{f}u-\mathfrak{f}_1 u\cdot h\|_{M_2}}{\|h\|_{M_1}}=0.$$

定理証毕.

作为第一个例子我們来考慮算子

$$\mathfrak{f}u(x)=e^{u(x)}.$$

从定理 17.6 可推出算子 $\mathfrak{f}$ 映球 $T\left(\theta,\frac{1}{2},L^*_{M_1}\right)$ 到 $L^*_{M_2}=L^2$ 內，其中 $M_1(u)=e^{|u|}-|u|-1$，再由定理 17.2 和 17.3，它映 $\Pi\left(E_{M_1},\frac{1}{2}\right)$ 到 L^2 內并且連續.

今証該算子可微并且它的弗力許微分 $\mathbf{B}h(x)=\mathfrak{f}_1 u(x)h(x)$ 在点 $u(x)\in\Pi\left(E_{M_1},\frac{1}{2}\right)$ 处有形式

$$\mathbf{B}h(x)=e^{u(x)}h(x).$$

应用定理 18.3，取 $\Phi(u)=|u|^{2+\beta}$，其中

$$0<\beta<\frac{1}{d(u,E_{M_1})}-2,$$

而 T 是中心在点 $u(x)$，半径为 $r=\frac{1}{2+\beta}-d(u,E_{M_1})$ 的球.

显然算子 $\mathfrak{f}$ 映球 T 到 L^2 內，因为球 $T\subset\Pi\left(E_{M_1},\frac{1}{2}\right)$. 又算子 $\mathfrak{f}_1 u(x)=e^{u(x)}$ 映球 $T\left(\theta,\frac{1}{2+\beta};L^*_{M_1}\right)$ 到 $L^*_\Phi=L^{2+\beta}$ 內，于是从定理 17.2 和 17.3 可推出它映 $\Pi\left(E_{M_1},\frac{1}{2+\beta}\right)$，特別映球 T 到 $L^*_\Phi=L^{2+\beta}$ 內并且連續.

为了証明的最后完成，只須再驗証条件(18.8)确实滿足，假如置 $R(u)=M_1(u)$，$Q(u)=N_1(u)$.

作为第二个例子我們来考慮算子

$$\mathfrak{f}u(x)=\sin u(x),\quad \mathfrak{f}_1 u(x)=\cos u(x).$$

这些算子映任何奥尔里奇空間 $L^*_{M_1}$ 到每一个集合 E_{M_2} 内，因而属于 $\{L^*_{M_1} \to L^*_{M_2};\text{H.}\}$。設 $L^*_{M_1} \subset L^*_{M_2}$，則算子 $\mathbf{B}h(x) = \mathfrak{f}_1 u(x) \cdot$ $\cdot h(x)$ 是算子 $\mathfrak{f}$ 的弗力許微分.

在所引入的例子中，算子 $\mathfrak{f}$ 是在某个球 T 内的每一点处可微.这也就是可微性的証明显得簡单的原因所在. 我們不难給出在奥尔里奇空間內的某一点处可微，而不在以該点为极限点的集合上可微的算子的例子.

譬如，設

$$\mathfrak{f}u(x) = \sin(e^{u^2(x)} - 1), \tag{18.12}$$

則 $\mathfrak{f}$ 可看成是 $\{L^4 \to L^2\}$ 中的算子. 在該算子可微的点处，它的弗力許微分显然有形式

$$\mathbf{B}h(x) = 2u(x)e^{u^2(x)}\cos(e^{u^2(x)} - 1)h(x).$$

易見上式右端仅对某些函数 $u(x)$ 才属于空間 L^2: 当 $h(x) \equiv 1$ 时对在 L^4 中到处稠密的函数 $u(x)$ 的集合，上式右端并不属于 L^2.

下面将要証明算子(18.12)在空間 L^4 的零点处可微.

6. 可微性的特殊条件. 本段将要指出算子 $\mathfrak{f}$ 在奥尔里奇空間的一点处的可微性的特殊条件. 我們仅限于討論在空間的零点 θ 处可微的条件，因为算子 $\mathbf{g}u(x) = g(x, u(x))$ 在点 $u_0(x)$ 处的可微性等价于算子 $\mathfrak{f}u(x) = g[x, u_0(x) + u(x)]$ 在零点处的可微性.

下面研究满足以下条件的函数 $f(x, u)$.

A) 不等式

$$|f(x, u) - f(x, 0) - f'_u(x, 0)u| \leqslant R(|u|)$$
$$(x \in G, -\infty < u < \infty) \tag{18.13}$$

成立，其中 $R(u)$ 是使得 $R(0) = R'(0) = 0$ 的連續非降函数，并且还存在对自变量的一切值满足 Δ'-条件

$$P(uv) \leqslant CP(u)P(v) \tag{18.14}$$

的 N-函数 $P(u)$ 使得对較大的值 $u_1 \geqslant u_0$, $u_2 \geqslant u_0$ 从 $u_1 < u_2$ 可推出

$$\frac{R(u_1)}{P(u_1)} < \mu \frac{R(\nu u_2)}{P(\nu u_2)}, \tag{18.15}$$

其中 μ, ν 是正常数.

把函数 $P(u) = |u|^r (r > 1)$ 看作是函数$P(u)$极为方便. 对于这样的函数 $P(u)$, 条件 (18.15) 满足,假如 $R(u)$ 是满足 Δ_3-条件的 N-函数的主部.

事实上,在这种情况下对自变量較大的值有 $u^r R(u) < R(\nu u)$, 其中 ν 是某一常数,因此对較大的值 u_1 和 u_2 从 $u_1 < u_2$ 可推出

$$\frac{R(u_1)}{u_1^r} < R(u_1) < R(u_2) = \frac{u_2^r R(u_2)}{u_2^r} < \nu^r \frac{R(\nu u_2)}{(\nu u_2)^r}.$$

在下面所要証明的定理中, 看成映 $L^*_{M_1}$ 到 $L^*_{M_2}$ 内的算子 $\mathfrak{f}$ 可微性的主要条件是建立在不等式 (18.13) 的基础上. 为了使得該不等式可以保証算子 $\mathfrak{f}$ 的可微性,显然必須要求

$$\lim_{\|h\|_{M_1}\to 0} \frac{\|R(|h(x)|)\|_{M_2}}{\|h\|_{M_1}} = 0.$$

如取函数 $h(x)$ 为测度趋于 0 的集合的特征函数,則条件轉为

$$\lim_{v\to\infty} \frac{N_2^{-1}(v)}{N_1^{-1}(v)} = 0, \tag{18.16}$$

其中 $N_1(v)$ 和 $N_2(v)$ 是 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 的余 N-函数,因为对于集合$G_1\left(\text{mes } G_1 = \frac{1}{v}\right)$的特征函数 $\kappa(x)$

$$\frac{\|R(\kappa)\|_{M_2}}{\|\kappa\|_{M_1}} = R(1)\frac{N_2^{-1}(v)}{N_1^{-1}(v)}.$$

給定 $\varepsilon > 0$. 从(18.16)可推出对自变量較大的值

$$N_2^{-1}(v) < \varepsilon N_1^{-1}(v).$$

从上述不等式又可推出 N-函数 $N_2(v)$ 的增加速度眞快于 N-函数 $N_1(v)$. 再由引理 13.1, N-函数 $M_1(u)$ 的增加速度眞快于 N-函数 $M_2(u)$, 卽任給 $\varepsilon > 0$,对自变量較大的値满足不等式

$$M_2(u) < M_1(\varepsilon u).$$

为了使得該不等式满足,只須函数$M_1(u)$和 $M_2(u)$之間有关系式

$$M_2[Q(u)] \leqslant M_1(u) \quad (u \geqslant u_0), \tag{18.17}$$

其中 $Q(u)$ 是某一 N-函数.

以后我們将假定条件(18.17)恆滿足. 此时由定理 13.3 可找到这样的常数 $q>0$, 使得

$$\|u\|_{M_2} \leqslant q\|u\|_{M_1} \quad (u(x) \in L^*_{M_1}). \tag{18.18}$$

再研究条件

Б) 算子

$$\mathfrak{f}_1 h(x) = f'_u(x, 0)h(x)$$

映 $L^*_{M_1}$ 到 $L^*_{M_2}$ 內并且連續.

注意,由(18.17)条件 Б) 恆滿足,假如函数 $a(x) = f'_u(x, 0)$ 有界. 如果函数 $a(x)$ 无界,那末滿足条件 Б) 只須函数 $a(x)$ 属于空間 L^*_Φ, 其中 $\Phi(u)$ 滿足定理 18.2 的条件之一.

定理 18.4. 假定滿足条件 А), (18.17) 和 Б). 又設

$$R(u) \leqslant b + aM_2^{-1}[M_1(ku)] \quad (0 \leqslant u < \infty), \tag{18.19}$$

其中 $a, b, k > 0$. 再設 $f(x, 0) \in L^*_{M_2}$.

則算子 $\mathfrak{f}$ 映空間 $L^*_{M_1}$ 的零点 θ 的某一邻域到空間 $L^*_{M_2}$ 內并且在 θ 处有弗力許微分

$$\mathbf{B}h(x) = \mathfrak{f}_1 h(x) = f'_u(x, 0)h(x).$$

証. 由(18.13)和(18.19)

$$|f(x, u)| \leqslant |f(x, 0)| + |a(x)u| + b + aM_2^{-1}[M_1(ku)]$$
$$(-\infty < u < \infty).$$

根据假設 $f(x, 0) \in L^*_{M_2}$. 又由条件 Б), $a(x)u(x) \in L^*_{M_2}$ 对每一个 $u(x) \in L^*_{M_1}$ 都成立. 再注意如果 $\|u\|_{M_1} \leqslant \dfrac{1}{k}$, 則 $R(|u(x)|) \in L^*_{M_2}$ 并且

$$\begin{aligned} \|R(|u(x)|)\|_{M_2} &= 2a\left\|\frac{1}{2a}R(|u(x)|)\right\|_{M_2} \leqslant \\ &\leqslant 2a\left\{1 + \int_G M_2\left[\frac{1}{2a}R(|u(x)|)\right]dx\right\} \leqslant \\ &\leqslant 2a + aM_2\left(\frac{b}{a}\right)\operatorname{mes} G + a\int_G M_1[ku(x)]dx \leqslant \\ &\leqslant 3a + aM_2\left(\frac{b}{a}\right)\operatorname{mes} G = \beta. \end{aligned} \tag{18.20}$$

因而算子 f 映球 $T\left(\theta, \frac{1}{k}; L^*_{M_1}\right)$ 到空間 $L^*_{M_2}$ 内.

为了証明算子 f 在零点 θ 处的可微性,我們必須証得

$$\lim_{\|u\|_{M_1}\to 0} \frac{\|R(|u(x)|)\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} = 0. \tag{18.21}$$

給定 $\varepsilon > 0$. 因 $R'(0) = 0$, 故可选出这样的 $c_1 > 0$, 使当 $|u| < c_1$ 时

$$R(|u|) \leqslant \varepsilon |u|. \tag{18.22}$$

对每一个函数 $u(x) \in L^*_{M_1}$ 定义如下的函数 $\tilde{u}(x)$:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{假如 } |u(x)| \leqslant c_1, \\ 0, & \text{假如 } |u(x)| > c_1. \end{cases}$$

由(18.22)和(18.18)

$$\|R(|\tilde{u}(x)|)\|_{M_2} \leqslant \varepsilon \|\tilde{u}\|_{M_2} \leqslant \varepsilon \|u\|_{M_2} \leqslant \varepsilon q \|u\|_{M_1}. \tag{18.23}$$

不失普遍性,可以認为在条件 A) 中所确定的常数 u_0 大于 c_1. 于是从条件 A)可推出,当 $u \geqslant c_1$ 且 $\gamma \leqslant \frac{c_1}{u_0^\nu}$ 时

$$R(u) \leqslant R\left(\frac{u_0}{c_1} u\right) \leqslant \mu \frac{R\left(\frac{u}{\gamma}\right)}{P\left(\frac{u}{\gamma}\right)} P\left(\frac{u_0}{c_1} u\right),$$

再由(18.14)

$$R(u) \leqslant C\mu R\left(\frac{u}{\gamma}\right) P\left(\frac{u_0 \gamma}{c_1}\right). \tag{18.24}$$

設 $\|u\|_{M_1} < \frac{c_1}{u_0^\nu k}$. 在(18.24)中命 $\gamma = k\|u\|_{M_1}$, 則

$$R(|u(x) - \tilde{u}(x)|) \leqslant C\mu R\left(\frac{|u(x) - \tilde{u}(x)|}{k\|u\|_{M_1}}\right) P\left(\frac{k u_0 \|u\|_{M_1}}{c_1}\right),$$

因而由(18.20)

$$\|R(u - \tilde{u})\|_{M_2} \leqslant C\mu\beta P\left(\frac{k u_0 \|u\|_{M_1}}{c_1}\right),$$

又因 $\lim\limits_{u\to 0} \frac{P(u)}{u} = 0$, 故

$$\lim_{\|u\|_{M_1}\to 0} \frac{\|R(u-\tilde{u})\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} = 0.$$

从上述关系式和(18.23)即可推出

$$\overline{\lim_{\|u\|_{M_1}\to 0}} \frac{\|R(u)\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} \leqslant \overline{\lim_{\|u\|_{M_1}\to 0}} \frac{\|R(\tilde{u})\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} +$$

$$+ \lim_{\|u\|_{M_1}\to 0} \frac{\|R(u-\tilde{u})\|_{M_2}}{\|u\|_{M_1}} \leqslant \varepsilon q.$$

因 ε 任意，故等式(18.21)成立.

定理証毕.

作为例子，让我們来研究 $\{L^4 \to L^2\}$ 中的算子(18.12).

因为函数 $f(x, u) = \sin(e^{u^2} - 1)$ 关于 $R(u) = e^{u^2} - 1$ 满足不等式(18.13)，所以条件 A) 满足，此时取 $P(u) = u^2$. 又因 $M_1(u) = u^4$，而 $M_2(u) = u^2$，故关于 $Q(u) = u^2$ 满足条件(18.17). 最后，条件 Б) 满足，因为在所考慮的情况下 $f'_u(x, 0) \equiv 0$. 至于条件(18.19)的成立是明显的.

由此可見，从定理 18.4 可推出 $\{L^4 \to L^2\}$ 中的算子(18.12)在空間 L^4 的零点 θ 处可微.

7. 輔助引理. 我們还需要研究由 N-函数 $M(u)$ 的导数 $P(u)$ 所定义的算子 $\mathbf{P}$

引理 18.2. 設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数，$N(v)$ 满足 Δ_2-条件. 又設 $M(u)$ 的导数 $P(u)$ 連續.

則由等式 $\mathbf{P}u(x) = P(|u(x)|)$ 所定义的算子 $\mathbf{P}$ 映 $\Pi(E_M, 1)$ 到 $L_N^* = L_N$ 内并且連續.

証. 由引理 9.1，算子 $\mathbf{P}$ 映 $T(\theta, 1; L_M^*)$ 到 L_N 内. 再从定理 17.2 即可推出算子 $\mathbf{P}$ 映 $\Pi(E_M, 1)$ 到 L_N 内. 至于算子 $\mathbf{P}$ 的連續性从定理 17.3 便可推出.

引理証毕.

8. 加脫梯度. 我們称定义在巴拿哈空間 E 上的泛函 $\mathbf{F}(u)$ 在点 $u \in E$ 处加脫可微，假如对任何 $h \in E$，函数 $\mathbf{F}(u + th)$ 关于 t 可微并且該函数的导数在 $t = 0$ 处有形式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(u+th)\Big|_{t=0}=(v,h),$$

其中 v 是 E 的共轭空間 $\bar{E}$ 内的元素,它与 h 无关. 元素 v 称为泛函 $\mathbf{F}(u)$ 在点 u 处的加脱梯度. 由公式 $\Gamma u=v$ 确定在 $\mathbf{F}(u)$ 加脱可微的一切点上的算子 Γ 同样也称为加脱梯度. 显然加脱梯度映 E 到共轭空間 $\bar{E}$ 内. 我們有下列結論(譬如参看[5a]):

引理 18.3. 設泛函 $\mathbf{F}(u)$ 在空間 E 的某个球 T 上加脱可微并且它的加脱梯度是連續算子,則泛函 $\mathbf{F}(u)$ 在通常意义下可微并且它的梯度(見第 1 段)与加脱梯度一致.

証. 設 $u\in T$, $u+h\in T$. 根据定义

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(u+th)=(\Gamma(u+th),h)\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

积分上述等式,得到

$$\mathbf{F}(u+h)-\mathbf{F}(u)=\int_0^1(\Gamma(u+th),h)dt.$$

因此

$$|\mathbf{F}(u+h)-\mathbf{F}(u)-(\Gamma u,h)|=\left|\int_0^1(\Gamma(u+th)-\Gamma u,h)dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|h\|_E\int_0^1\|\Gamma(u+th)-\Gamma u\|_{\bar{E}}dt.$$

于是从算子 Γ 的連續性可推出

$$\lim_{\|h\|_E\to 0}\frac{|\mathbf{F}(u+h)-\mathbf{F}(u)-(\Gamma u,h)|}{\|h\|_E}=0.$$

引理証毕.

9. 刘克施姆布洛格范数的梯度. 設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数, $N(v)$ 满足 Δ_2-条件, 并且在下面的討論中还处处假定函数 $p(u)=M'(u)$ 連續. 为方便起見,我們也对負的自变量的値来考虑函数 $p(u)$;显然 $p(-u)=-p(u)$.

設 $u(x)$, $h(x)\in E_M$. 对一切 t 和 $k\neq 0$, 定义函数

$$\varphi(t,k)=\int_G M\left[\frac{u(x)+th(x)}{k}\right]dx. \qquad (18.25)$$

不难看出1)

$$\frac{\partial\varphi(t,k)}{\partial t}=\frac{1}{k}\int_G p\left[\frac{u(x)+th(x)}{k}\right]h(x)dx \quad (18.26)$$

和

$$\frac{\partial\varphi(t,k)}{\partial k}=-\frac{1}{k^2}\int_G p\left[\frac{u(x)+th(x)}{k}\right][u(x)+th(x)]dx. \quad (18.27)$$

由引理 18.2,上述导数中的每一个对一切变量連續.

設 $u(x)\in L_M^*$ 是这样的函数,它对某一 $k>0$ 滿足

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{k}\right]dx=1. \quad (18.28)$$

我們記得(参看 77 頁),在这种情况下数 k 与刘克施姆布洛格范数一致:

$$k=\|u\|_{(M)}.$$

显然对一切函数 $u(x)\in E_M(\|u\|_{(M)}\neq 0)$, 它的刘克施姆布洛格范数可以借助等式(18.28)加以确定. 这从下列事实卽可推出: 等式(18.28)左端的积分对一切 $k\neq 0$ 有限,关于 k 連續并且

$$\lim_{k\to 0}\int_G M\left[\frac{u(x)}{k}\right]dx=\infty,\quad \lim_{k\to\infty}\int_G M\left[\frac{u(x)}{k}\right]dx=0.$$

定理 18.5. 刘克施姆布洛格范数是 E_M 上的可微泛函,并且它的梯度 Γ 由下列公式确定:

$$\Gamma u(x)=\frac{p\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right)}{\int_G p\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right)\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}dx} \quad (u(x)\in E_M). \quad (18.29)$$

証. 首先我們来找出刘克施姆布洛格范数的加脫梯度. 为此,研究等式

$$\int_G M\left[\frac{u(x)+th(x)}{k}\right]dx=1 \quad (u(x),h(x)\in E_M). \quad (18.30)$$

1) 此处和以后所遇到的积分号下取微分的合理性,可以利用典型的方法加以証明.

該等式确定了 k 为 t 的隐函数. 因为方程(18.30)左端的偏导数(18.26)和(18.27)連續并且

$$\frac{\partial \varphi(0,k)}{\partial k} = -\frac{1}{k^2}\int_G p\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)|u(x)|\,dx < 0(\|u\|_{(M)} \neq 0),$$

所以根据隐函数定理(譬如参看[56])

$$\frac{dk(0)}{dt} = (v, h),$$

其中

$$v = \frac{p\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right)}{\int_G p\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right)\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\,dx}.$$

我們已經証出公式(18.29)确定了加脫梯度. 又因为从引理18.2可推出該加脫梯度是連續算子,所以由引理18.3,它就是通常的梯度.

定理証毕.

10. 奥尔里奇范数的梯度. 在本段的研究中,N-函数 $M(u)$ 和 $N(v)$ 满足与前一段相同的限制. 由引理18.2对每一个函数 $u(x) \in E_M$, 函数

$$J(k) = \int_G N[p(k|u(x)|)]dx$$

对一切 k 值有定义并且連續. 因 $J(0) = 0, J(\infty) = \infty$, 故可找到这样的 k^*, 使得 $J(k^*) = 1$. 由定理10.4, 这表明奥尔里奇范数可以借助等式

$$\|u\|_M = \int_G p(k^*|u(x)|)|u(x)|\,dx \qquad (18.31)$$

加以确定,其中

$$\int_G N[p(k^*|u(x)|)]dx = 1. \qquad (18.32)$$

为方便起見,我們利用等价的等式(見(10.7))

$$k^*\int_G |u(x)|p(k^*|u(x)|)dx - \int_G M[k^*u(x)]dx = 1 \qquad (18.33)$$

来代替公式(18.32).

如同已經指出的那样，常数 k^* 一般說来不是唯一确定的．本段假定 $p(u)$ 沒有积分常数．显然这时 k^* 唯一确定．容易驗証 k^* 是 E_M 上的連續泛函．

設 $u(x), h(x) \in E_M$．以 $k(t)$ 表示相应于函数 $u_t(x) = u(x) + th(x)$ 的方程(18.33)的解．

引理 18.4． 設函数 $k(t)$ 有导数 $k'(t)$，則奥尔里奇范数是 E_M 上的可微泛函，并且它的梯度 Γ 由下列公式确定：

$$\Gamma u(x) = p(k^* u(x)) \quad (u(x) \in E_M), \qquad (18.34)$$

其中 k^* 滿足方程(18.33)．

証． 因为由引理 18.2 和泛函 k^* 的連續性，公式(18.34)所确定的算子 Γ 是映 E_M 到 L_N 內的連續算子，所以我們只須証 Γ 是奥尔里奇范数的加脫梯度．

由(18.31)和(18.32)，函数 $u(x) \in E_M$ 的奥尔里奇范数可以借助等式

$$\|u\|_M = \frac{1}{k^*}\left(1 + \int_G M[k^* u(x)]dx\right)$$

加以确定，其中 k^* 滿足等式(18.33)．設 $h(x) \in E_M$．考慮函数

$$\mathbf{F}(u + th) = \frac{1}{k(t)}\left(1 + \int_G M[k(t)u_t(x)]dx\right),$$

其中 $u_t(x) = u(x) + th(x)$．由函数 $k(t)$ 的可微性[1)]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(u + th) = \frac{1}{k^2(t)}\left\{k(t)\int_G p[k(t)u_t(x)][k'(t)u_t(x) + k(t)h(x)]dx - k'(t)\left(1 + \int_G M[k(t)u_t(x)]dx\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2(t)}\left\{k^2(t)\int_G p[k(t)u_t(x)]h(x)dx + k'(t)\left[k(t)\int_G p[k(t)u_t(x)]u_t(x)dx - 1 - \int_G M[k(t)u_t(x)]dx\right]\right\},$$

1) 見 180 頁的脚注．

因而由(18.33)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(u+th)=\int_G p[k(t)u_t(x)]h(x)dx.$$

因为 $k(0)=k^*$ 并且 $u_t(x)|_{t=0}=u(x)$，所以

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(u+th)\Big|_{t=0}=(v,h),$$

其中 $v=p(k^*u(x))$.

引理証毕.

为了应用上述引理，我們必須知道在什么条件下函数 $k(t)$ 可微.

引理 18.5. 設 N–函数 $M(u)$ 有連續的二阶导数 $p'(u)$，并且当 $u\neq 0$ 时 $p'(u)>0$，同时还滿足不等式

$$|up'(u)|\leqslant a+bp(c|u|)\quad(-\infty<u<\infty).\quad(18.35)$$

則方程(18.33)相应于函数 $u_t(x)=u(x)+th(x)$ 的解 $k(t)$ 是可微函数.

証. 首先注意，由(18.35)算子 $u(x)p'(u(x))$ 如同算子 $p(u(x))$ 一样映 E_M (甚至映 $\Pi(E_M,1)$) 到 L_N 内并且連續. 因此对于任何一对函数 $u(x)$, $h(x)\in E_M(\|u\|_M\neq 0)$，积分

$$\int_G u_t^2(x)p'[ku_t(x)]dx\quad 和\quad \int_G u_t(x)h(x)p'[ku_t(x)]dx$$

对任意 t 和 $k>0$ 有限并且是这些变量的連續函数，其中 $u_t(x)=$ $=u(x)+th(x)$. 于是即可推出函数

$$\chi(t,k)=k\int_G u_t(x)p[ku_t(x)]dx-\int_G M[ku_t(x)]dx$$

有連續的偏导数[1)]

$$\frac{\partial\chi(t,k)}{\partial t}=k^2\int_G u_t(x)h(x)p'[ku_t(x)]dx$$

和

$$\frac{\partial\chi(t,k)}{\partial k}=k\int_G u_t^2(x)p'[ku_t(x)]dx.$$

1) 見180頁的脚注.

又因

$$\frac{\partial \chi(0, k)}{\partial k} = k\int_G u^2(x)p'[ku(x)]dx > 0,$$

从而方程

$$k\int_G u_t(x)p[ku_t(x)]dx - \int_G M[ku_t(x)]dx = 1$$

确定了 k 为 t 的隐函数并且函数 $k(t)$ 有連續的导数 $k'(t)$.

引理証毕.

条件 (18.35) 满足,假如函数 $p'(u)$ 单調. 事实上,如果 $p'(u)$ 下降,則由 $p'(u)$ 为偶函数可知

$$p(|u|) = \int_0^{|u|} p'(t)dt > |u|p'(u).$$

同样,如果 $p'(u)$ 上升,則

$$p(2|u|) = \int_0^{2|u|} p'(t)dt > \int_{|u|}^{2|u|} p'(t)dt > |u|p'(u).$$

从引理 18.4 和 18.5 即可推出

定理 18.6. 設 N-函数 $M(u)$ 有連續的二阶导数 $p'(u)$, 并且当 $u \neq 0$ 时 $p'(u) > 0$, 同时还满足不等式(18.35). 又設余 N-函数 $N(v)$ 满足 Δ_2-条件, 則奥尔里奇范数是 E_M 上的可微泛函, 并且它的梯度 Γ 由下列等式确定:

$$\Gamma u(x) = p(k^* u(x)) \quad (u(x) \in E_M),$$

其中

$$\int_G N[p(k^*|u(x)|)]dx = 1.$$

第四章　非綫性积分方程

§19. 烏利孙 (П. С. Урысон) 算子

1. 烏利孙算子. 我們称由公式

$$\mathbf{K}u(x)=\int_G k[x,y,u(y)]dy \tag{19.1}$$

所定义的算子为烏利孙算子. 关于函数 $k(x,y,u)$, 假定它滿足卡拉太屋独里条件, 即对几乎所有的 $x,y\in G$ 关于 u 連續并且对每一个确定的 u 关于 x,y 可測[1].

我們还假定函数 $k(x,y,u)$ 滿足不等式

$$|k(x,y,u)|\leqslant k(x,y)[a(x)+R(|u|)]$$
$$(x,y\in G,\ -\infty<u<\infty), \tag{19.2}$$

其中

$$\iint\limits_G M[k(x,y)]dx\,dy\leqslant b<\infty, \tag{19.3}$$

$M(u)$ 是某一 N-函数, $a(x)$ 是非負函数, $R(u)$ 是非負的且当 $u>0$ 时单調增加的連續函数.

我們有兴趣的問題是在何种情况下条件(19.2)和(19.3)充分保証了烏利孙算子映某一奥尔里奇空間 L_Φ^* 到它自己内并且在該空間内連續,有界,列紧,全連續[2].

假設从条件(19.2)和(19.3)可推出算子(19.1)在球 $T(\theta,r;L_\Phi^*)$ 上的值的有界性:

$$\|\mathbf{K}u\|_\Phi\leqslant c(\|u\|_\Phi\leqslant r). \tag{19.4}$$

---

1) 我們不准备提到以后将遇見的集合和函数的可測性的証明.

2) 算子称为在集合 T 上列紧,假如它变每一个有界子集 $T_1\subset T$ 为列紧集. 算子称为全連續,假如它列紧且連續. 注意, 对非綫性算子而言,从列紧性推不出連續性.

在这里自然假定常数 c 仅依賴于数 b 和函数 $a(x)$, $R(u)$ 和 $M(u)$. 設 $k(x)$ 是 L_M^* 中的非負函数,并且满足

$$\int_G M[k(x)]dx \leqslant \frac{b}{\text{mes } G},$$

則算子

$$\mathbf{K}u(x) = \int_G \frac{k(x) + k(y)}{2} R(|u(y)|)dy$$

滿足条件(19.2)和(19.3),故由条件(19.4)

$$\left\| \int_G k(y)R(|u(y)|)dy + k(x)\int_G R(|u(y)|)dy \right\|_\Phi \leqslant 2c$$
$$(\|u\|_\Phi \leqslant r), \tag{19.5}$$

由此可見 $k(x) \in L_\Phi^*$. 換言之 $L_M^* \subset L_\Phi^*$,于是由定理 13.1 对自变量較大的值和某一 $\alpha > 0$

$$\Phi(\alpha u) < M(u). \tag{19.6}$$

从(19.5)又可推出积分 $\int_G k(y)R(|u(y)|)dy$ 对任何函数 $k(x) \in L_M^*$ 是有限的. 不仅如此,算子

$$\mathbf{R}u(x) = R\left(\frac{r|u(x)|}{2}\right)$$

还变球 $T(\theta, r; L_\Phi^*)$ 为空間 L_N^* 的某一有界集,其中 $N(v)$ 与平常一样表示 $M(u)$ 的余 N-函数. 由定理 17.5 可选出正常数 c_1, c_2 和 c_3,使得

$$N\left[\frac{1}{c_1}R\left(\frac{ru}{2}\right)\right] \leqslant c_2 + c_3\Phi(u) \quad (-\infty < u < \infty).$$

从上述不等式可推出对自变量較大的值

$$N[\beta R(\gamma u)] < k\Phi(\alpha u). \tag{19.7}$$

由于建立了以上的不等式,所以在今后的研究中恆假定对 u 較大的値

$$N[\beta R(\gamma u)] < kM(u), \tag{19.8}$$

而 N-函数 $\Phi(u)$ 滿足条件(19.6)和(19.7).

2. 烏利孙算子的有界性. 我們的注意力集中到 $M(u)$ 的余

N–函数满足 Δ'–条件的情形.

引理 19.1. 設 N–函数 $N(v)$ 满足 Δ'–条件，又設条件 (19.2)，(19.3)，(19.6) 和 (19.7) 满足，最后設 $a(x) \in L_N^* = L_N$，則算子 (19.1) 定义在球 $T\left(\theta, \frac{\gamma}{\alpha}; L_\Phi^*\right)$ 上并且它的值的集合对 L_Φ^* 的范数一致有界：

$$\|\mathbf{K}u\|_\Phi \leqslant C\|k(x, y)\|_{\hat{M}} \quad \left(\|u\|_\Phi \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}\right), \tag{19.9}$$

其中常数 C 不依賴于核 $k(x, y)$.

證. 設不等式(19.7)当 $u \geqslant u_0$ 时满足，則因

$$\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leqslant \|a\|_N + \frac{1}{\beta}\|\beta R(|u(x)|)\|_N \leqslant$$

$$\leqslant \|a\|_N + \frac{1}{\beta}\left\{1 + \int_G N[\beta R(|u(x)|)]dx\right\},$$

故由(19.7)当 $\|u\|_\Phi \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}$ 时

$$\begin{aligned}\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N &\leqslant \|a\|_N + \\ &+ \frac{1}{\beta}\left\{1 + N[\beta R(\gamma u_0)]\operatorname{mes} G + \right. \\ &\left. + k\int_G \Phi\left[\frac{\alpha}{\gamma}u(x)\right]dx\right\} \leqslant \|a\|_N + \\ &+ \frac{1}{\beta}\{1 + k + N[\beta R(\gamma u_0)]\operatorname{mes} G\},\end{aligned}$$

即

$$\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leqslant C_1 \quad \left(\|u\|_\Phi \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}\right). \tag{19.10}$$

由定理 15.4，綫性积分算子

$$\mathbf{A}v(x) = \int_G k(x, y)v(y)dy$$

映 L_N 到 L_Φ^* 內，并且

$$\|\mathbf{A}v\|_\Phi \leqslant 2l\|k(x, y)\|_{\hat{M}}\|v\|_N. \tag{19.11}$$

由(19.2)

$$|\mathbf{K}u(x)| \leqslant \mathbf{A}[a(x) + R(|u(x)|)],$$

因而由(19.11)和(19.10)

$$\|\mathbf{K}u\|_\Phi \leqslant 2l\|k(x, y)\|_{\hat{M}}\|a(x) + \\ + R(|u(x)|)\|_N \leqslant 2C_1 l\|k(x, y)\|_{\hat{M}}.$$

引理証毕.

3. 第一个更簡单的算子. 我們假定引理 19.1 的条件滿足. 由定理 17.1 可选出这样的閉集列 $\hat{G}_n \subset \hat{G}$ 使得 $\mathrm{mes}(\hat{G} \setminus \hat{G}_n) < \frac{1}{n}$ 并且在集合 $\hat{G}_n \times (-\infty, \infty)$ 上函数 $k(x, y, u)$ 对一切变量連續, 而在集合 $\hat{G}_n$ 上函数 $k(x, y)$ 和 $k(x, y)a(y)$ 連續. 命

$$k_n(x, y, u) = \begin{cases} k(x, y, u), & \text{假如 } \{x, y\} \in \hat{G}_n, \\ 0, & \text{假如 } \{x, y\} \bar{\in} \hat{G}_n. \end{cases}$$

易見函数 $k_n(x, y, u)$ 中的每一个滿足条件 (19.2), 从而由引理 19.1, 它所确定的烏利孙算子

$$\mathbf{K}_n u(x) = \int_G k_n[x, y, u(y)]dy$$

映球 $T\left(\theta, \frac{\gamma}{\alpha}; L_\Phi^*\right)$ 到 L_Φ^* 内.

显然

$$\mathbf{K}u(x) - \mathbf{K}_n u(x) = \int_G k[x, y, u(y)]\kappa(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n)dy.$$

由(19.2)和引理 19.1

$$\|\mathbf{K}u - \mathbf{K}_n u\|_\Phi \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int_G k(x, y)\kappa(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n)[a(x) + R(|u(y)|)]dy\right\|_\Phi \leqslant$$

$$\leqslant C\|k(x, y)\kappa(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n)\|_{\hat{M}} \quad \left(\|u\|_\Phi \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

再补充假定 $k(x, y) \in \hat{E}_M$, 則由定理 10.3

$$\lim_{n\to\infty}\|k(x, y)\kappa(x, y; \hat{G} \setminus \hat{G}_n)\|_{\hat{M}} = 0.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|u\|_\Phi \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}} \|\mathbf{K}u - \mathbf{K}_n u\|_\Phi = 0.$$

于是我們証明了算子 **K** 可以由算子 $\mathbf{K}_n$ 一致地逼近, 假如在

引理 19.1 的条件中的 $k(x, y) \in \hat{E}_M$.

由此可見，为了証明算子 $\mathbf{K}$ 的連續性或列紧性，只須証算子 $\mathbf{K}_n$ 的連續性或列紧性. 而确定算子 $\mathbf{K}_n$ 的函数 $k_n(x, y, u)$ 滿足不等式

$$|k_n(x, y, u)| \leqslant a_n + b_n R(|u|) \quad (-\infty < u < \infty),$$

其中

$$a_n = \max_{(x, y) \in \bar{G}_n} |k(x, y) a(x)|, \; b_n = \max_{(x, y) \in \bar{G}_n} |k(x, y)|.$$

这样一来，在前面的假設下，任意算子 $\mathbf{K}$ 的連續性和列紧性得到証明，假如对烏利孙算子

$$\mathbf{K}u(x) = \int_G k[x, y, u(y)] dy$$

在

$$\begin{gathered} |k(x, y, u)| \leqslant a + R(|u|) \\ (x, y \in G, \; -\infty < u < \infty) \end{gathered} \tag{19.12}$$

的假定下証明了相应的性質.

4. 第二个更简单的算子. 設条件(19.12)滿足. 我們定义新的函数列 $k_n(x, y, u)$，借助于等式

$$k_n(x, y, u) = \begin{cases} k(x, y, u), & \text{假如 } |u| \leqslant n, \\ k(x, y, n)(n+1-u), & \text{假如 } n < u < n+1, \\ k(x, y, -n)(u+n+1), & \text{假如 } -n-1 < u < -n, \\ 0, & \text{假如 } |u| \geqslant n+1. \end{cases}$$

設烏利孙算子 $\mathbf{K}_n$ 是由函数 $K_n(x, y, u)$ 定义的. 今証

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\|u\|_\Phi \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}} \|\mathbf{K}u - \mathbf{K}_n u\|_\Phi = 0. \tag{19.13}$$

設 $u(x) \in T\left(\theta, \frac{\gamma}{\alpha}; L_\Phi^*\right)$，以 G' 表示集合 $G\{|u(x)| > n\}$，显然

$$\operatorname{mes} G' \leqslant \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)} \int_G \Phi\left[\frac{\alpha u(x)}{\gamma}\right] dx \leqslant \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)} \left\| \frac{\alpha}{\gamma} u \right\|_\Phi \leqslant \frac{1}{\Phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}.$$

让我們来估計 $\|\mathbf{K}u - \mathbf{K}_n u\|_\Phi$. 从算子 $\mathbf{K}_n$ 的定义可推出

$$|\mathbf{K}u(x)-\mathbf{K}_n u(x)| \leqslant \int_G |k[x, y, u(y)]-k_n[x, y, u(y)]|\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{G'} |k[x, y, u(y)]|\,dy + \int_{G'} |k[x, y, \psi(y)]|\,dy,$$

其中

$$\psi(x) = n\kappa(x;\, G')\,\mathrm{sign}\, u(x),\ \|\psi\|_\Phi \leqslant \|u\|_\Phi \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}.$$

再由(19.12)

$$|\mathbf{K}u(x) - \mathbf{K}_n u(x)| \leqslant \int_G \kappa(x, y;\, \hat{G}')[a + R(|u(y)|)]dy +$$
$$+ \int_G \kappa(x, y;\, \hat{G}')[a + R(|\psi(y)|)]dy,$$

其中 $\hat{G}' = G \times G'$. 于是从引理 19.1 可推出不等式

$$\|\mathbf{K}u - \mathbf{K}_n u\|_\Phi \leqslant 2C\|\kappa(x, y;\, \hat{G}')\|_{\tilde{M}} = 2C \,\mathrm{mes}\, \hat{G}' N^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{mes}\, \hat{G}'}\right).$$

从而利用对 mes G' 的估計式即得不等式

$$\|\mathbf{K}u - \mathbf{K}_n u\|_\Phi \leqslant \frac{2C \,\mathrm{mes}\, G}{\Phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)} N^{-1}\left[\frac{\Phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}{\mathrm{mes}\, G}\right]\left(\|u\|_\Phi \leqslant \frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

因而推出(19.13).

由此可見,在引理 19.1 的条件以及补充条件 $k(x, y) \in \hat{E}_M$ 下,烏利孙算子的連續性和列紧性得到証明,假如对由函数 $k(x, y, u)$ 所确定的烏利孙算子証明了相应的性質,此处函数 $k(x, y, u)$ 有界:

$$|k(x, y, u)| \leqslant d \quad (x, y \in G,\ -\infty < u < \infty), \tag{19.14}$$

并且滿足条件

$$k(x, y, u) \equiv 0 \quad (|u| \geqslant u_0), \tag{19.15}$$

其中 u_0 是某一正数.

5. 第三个更簡单的算子. 設条件(19.14)和(19.15)滿足. 由定理 17.1, 存在閉集列 $\hat{G}_n \subset \hat{G}$ 使得 mes $(\hat{G} \setminus \hat{G}_n) \to 0$, 而函数 $k(x, y, u)$ 对一切变量 $\{x, y\} \in \hat{G}_n$, $-\infty < u < \infty$ 連續. 根据

烏利孙定理，存在对一切变量連續的函数 $k_n(x, y, u)$，它与 $k(x, y, u)$ 一致当 $\{x, y\} \in \hat{G}_n$ 时，并且还滿足条件

$$|k_n(x, y, u)| \leqslant d \quad (x, y \in G, -\infty < u < \infty),$$
$$k_n(x, y, u) \equiv 0 \quad (|u| \geqslant u_0).$$

讓我們来研究由函数 $k_n(x, y, u)$ 所定义的烏利孙算子 $\mathbf{K}_n$. 因为算子 $\mathbf{K}_n$ 中的每一个变任何奥尔里奇空間为一致有界并且等度連續的函数族，所以每一个算子 $\mathbf{K}_n$ 的値的集合在 C 中列紧，从而更在任何奥尔里奇空間内列紧.

設函数列 $u_i(x)(i = 1, 2, \cdots)$ 按奥尔里奇空間的范数收斂于函数 $u_0(x)$，則該函数列依測度收斂于 $u_0(x)$；又算子 $\mathbf{K}_n$ 变每一个依測度收斂于 $u_0(x)$ 的函数列为对每一个 x 收斂的函数列，这从积分号下取极限的可能性即可推出

$$\mathbf{K}_n u_0(x) = \int_G k_n[x, y, u_0(y)]dy =$$
$$= \lim_{i\to\infty}\int_G k_n[x, y, u_i(y)]dy = \lim_{i\to\infty}\mathbf{K}_n u_i(x);$$

于是叙列 $\mathbf{K}_n u_i(x)$ 一致收斂于函数 $\mathbf{K}_n u_0(x)$，因为它列紧. 由此可見 $\mathbf{K}_n \in \{L_\Phi^* \to C;\ \text{вп. н.}\}$，从而更有 $\mathbf{K}_n \in \{L_\Phi^* \to L_\Phi^*;\ \text{вп. н.}\}$.

对任何函数 $u(x) \in L_\Phi^*$ 显然有不等式

$$|\mathbf{K}u(x) - \mathbf{K}_n u(x)| \leqslant 2d\int_G \kappa(x, y; \hat{G}\diagdown\hat{G}_n)dy,$$

因而

$$\|\mathbf{K}u - \mathbf{K}_n u\|_\Phi \leqslant C_1\|\kappa(x, y; \hat{G}\diagdown\hat{G}_n)\|_\Phi.$$

所得到的不等式表明連續且列紧的算子 $\mathbf{K}_n$ 在整个空間 L_Φ^* 上一致收斂于算子 $\mathbf{K}$. 換言之，算子 $\mathbf{K}$ 連續且列紧.

6. 烏利孙算子全連續性的基本定理. 我們先来陈述在前几段中所得到的結果.

定理 19.1. 設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数，$N(v)$ 滿足 Δ'-条件. 又設

$$|k(x, y, u)| \leqslant k(x, y)[a(x) + R(|u|)],$$
$$(x, y \in G, -\infty < u < \infty) \qquad (19.16)$$

其中 $k(x, y) \in \hat{E}_M$, $a(x) \in L_N^*$, $R(u)$ 是非負的漸升函数. 最后假定可以找到正数 β, γ 和 K,使对自变量較大的值有

$$N[\beta R(\gamma u)] \leqslant KM(u). \tag{19.17}$$

則算子

$$\mathbf{K}u(x) = \int_G k[x, y, u(y)]dy \tag{19.18}$$

属于 $\{T(\theta, \gamma; L_\Phi^*) \to L_\Phi^*$; вп. н.$\}$, 其中 $\Phi(u)$ 是这样的 N-函数,它对自变量較大的值满足不等式

$$N[\beta R(\gamma u)] \leqslant K\Phi(u) \leqslant KM(u). \tag{19.19}$$

自然提出这样的問題, 在何种假設下算子 $\mathbf{K}$ 不仅定义在球 $T(\theta, \gamma; L_\Phi^*)$ 上, 而且是定义在整个空間 L_Φ^* 上? 这个結論将要成立,假如在条件(19.17)和(19.19)中可以取任意大的 γ.

特别,算子 $\mathbf{K}$ 映整个 L_Φ 到它自己內,假如 N-函数 $\Phi(u)$ 满足 Δ_2-条件,因为在这种情况下对自变量較大的值有

$$N[\beta R(2^s\gamma u)] \leqslant K\Phi(2^s u) \leqslant K_1\Phi(u) \leqslant K_1M(u).$$

相似地可以証实,烏利孙算子在整个空間 L_Φ^* 上全連續, 假如函数 $R(u)$ 满足 Δ_2'-条件:对自变量較大的値有

$$R(2u) \leqslant K_1R(u).$$

条件(19.17)和(19.19)在某些情况下可以写成更簡单的形式.

假定函数 $\Phi(u)$ 使得 $N[\Phi(u)] \sim \Phi(u)$, 即对自变量較大的值有 $N[\Phi(u)] \leqslant \Phi(\alpha u)$,則条件(19.17)和(19.19)满足,假如

$$R(\alpha\gamma u) \leqslant K\Phi(u) \leqslant KM(u). \tag{19.20}$$

这从下列明显的不等式即可推出:

$$N[R(\gamma u)] \leqslant N\left[K\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right] \leqslant K_1N\left[\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant K_1\Phi(u) \leqslant K_1M(u).$$

在书 [21д] 中指出了非綫性积分算子在空間 L^α 內全連續的各种条件. 所有这些定理都是关于多項式型的非綫性的研究. 前面已經証明的定理 19.1 不仅包含了 [21д] 的主要定理,而且还給出了在某些奥尔里奇空間內实质上非冪, 譬如是指数型的非綫性

的积分算子全連續性的条件.

譬如,設

$$|k(x, y, u)| \leqslant k(x, y) e^{a|u|}$$
$$(x, y \in G, -\infty < u < \infty) \tag{19.21}$$

并且

$$|k(x, y)| \leqslant a |\ln r|^{1-\beta_0} + b, \tag{19.22}$$

其中 r 是点 $x, y \in G$ 之間的距离.

設 $\Phi(u) = e^{|u|^{1+\beta}}$ 的主部,其中 $0 \leqslant \beta < \beta_0$;又設 $M(u) = \Phi(u)$. 显然 $k(x, y) \in \hat{E}_M$, 因为对任何 $\lambda > 0$

$$\iint_{\hat{G}} \exp |\lambda k(x, y)|^{1+\beta} dx\, dy < \infty.$$

因 $M(u)$ 满足 Δ^2-条件, 故其余 N-函数 $N(v)$ 满足 Δ'-条件. 由于定理 6.3 $N[\Phi(u)] \sim \Phi(u)$, 所以利用定理 19.1 时可把条件(19.17)和(19.19)換成条件(19.20).

易見条件 (19.20) 满足, 而且对任意的 $\gamma > 0$ 都满足, 假如 $\beta > 0$.

由此可見, 当条件(19.21)和(19.22)满足时, 烏利孙算子在空間 $L^*_{\Phi_0}$ 的某个球内全連續, 其中 $\Phi_0(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, 并且在整个空間 L^*_{Φ} 内全連續, 其中 $\Phi(u)$ 是任何形如 $\Phi(u) = e^{|u|^{1+\beta}} - 1$ 的函数,此处 $0 < \beta < \beta_0$.

相似的討論可証得,烏利孙算子在整个空間 $L^*_{\Phi_0}$ 内全連續,其中 $\Phi_0(u) = (e^{|u|^{1-\beta_0}} - 1)|u|$, 假如

$$|k(x, y, u)| \leqslant (a|\ln r| + b) e^{|u|^{1-\beta}}, \tag{19.23}$$

当 $\beta_0 < \beta < 1$ 时.

7. 較弱的非綫性的情形. 在上述所討論的情况中,函数 $M(u)$ 的增加速度快于某一冪函数, 因为它的余 N-函数 $N(v)$ 满足 Δ'-条件. 换言之,对于所研究的情况,条件 (19.2) 中的函数 $k(x, y)$ 属于某一 $L^\alpha(\alpha > 1)$. 本段假定

$$\iint_{\hat{G}} M[k(x, y)] dx\, dy < \infty, \tag{19.24}$$

其中 $M(u) \prec |u|^{\alpha}$ 对一切 $\alpha > 1$ 成立. 此时它的余 N-函数 $N(v)$ 的增加速度快于任意冪. 我們还假定 $N(v)$ 满足 Δ_3-条件,此时函数 $M(u)$ 本身滿足 Δ_2-条件.

如同前面已經闡明的那样, 要研究烏利孙算子自然要假定对自变量較大的值滿足条件(19.8):

$$N[\beta R(\gamma u)] < KM(u) < M(Ku). \tag{19.25}$$

由定理 6.3,对自变量較大的值不等式 $N^{-1}[M(u)] \prec K_1 N^{-1}(u)$ 成立. 因此从(19.25)可推出对較大的 u 值

$$\beta R(\gamma u) < N^{-1}[M(Ku)] < K_1 N^{-1}(Ku).$$

再由定理 6.1 对較大的 u 值

$$\beta R(\gamma u) < \frac{K_1}{K} \frac{KuN^{-1}(Ku)}{u} < \frac{K_1}{Ku} M(K_2 u).$$

因为 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件,所以从(19.25)最后可推出对較大的 u 值

$$R(u) < C \frac{M(u)}{u}. \tag{19.26}$$

注意,从(19.26)也可推出条件(19.25),甚至还可推出对較大的 u 值和某个 β 与 γ 有不等式

$$N[\beta R(u)] < \frac{1}{\gamma} u. \tag{19.27}$$

从上述不等式还可推出对自变量較大的值

$$R(u) < C_1 N^{-1}(u).$$

这表明在所研究的情况中, $R(u)$ 的非綫性的性质必須是很弱的. 事实上,从 $N(v)$ 满足 Δ_3-条件可推出 $N(v)$ 的增加速度快于任何冪函数. 因此所得到的不等式說明,$R(u)$ 的增加速度慢于任何冪函数 $|u|^{\varepsilon}(\varepsilon > 0)$. 如果 $N(v)$ 滿足 Δ^2-条件,则如同以前已經指出的那样 (42 頁), $N(v)$ 的增加速度快于某一函数 $e^{v^{\alpha}}(\alpha > 0)$. 由此即可推出在所研究的情况下, $R(u)$ 的增加速度慢于 $(\ln u)^{\frac{1}{\alpha}}$.

定理 19.2. 設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数, $N(v)$ 满足 Δ_3-条件. 又設

$$|k(x, y, u)| \leqslant k(x, y)[a(x) + R(|u|)]$$
$$(x, y \in G, -\infty < u < \infty), \tag{19.28}$$

其中 $k(x, y) \in \hat{L}_M^* = \hat{L}_M$, $a(x) \in L_N^*$, $R(u)$ 是非負的,当 $u > 0$ 时非下降的函数. 最后再設存在 $C > 0$,使对自变量較大的值滿足不等式(19.26). 則可找到奥尔里奇空間 L_Φ^*,使得算子

$$\mathbf{K}u(x) = \int_G k[x, y, u(y)]dy \tag{19.29}$$

映 L_Φ^* 到它自己内并且全連續.

証. 因为函数 $M[k(x, y)]$ 在 $\hat{G}$ 上可求和,所以可找到(参看 61 頁)滿足 Δ_2-条件(甚至 Δ_3-条件)的 N-函数 $\Phi(u)$ 使得

$$\iint_{\hat{G}} \Phi\{M[k(x, y)]\}dx\,dy < \infty. \tag{19.30}$$

今証算子(19.29)映空間 L_Φ^* 到它自己内. 从不等式(19.26)可推出对較大的 u 值不等式(19.27)成立. 假定当 $u \geqslant u_0$ 时它滿足. 設 $u(x) \in L_\Phi^* = L_\Phi$, 因为

$$\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leqslant \|a\|_N + \frac{1}{\beta}\|\beta R(|u(x)|)\|_N \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_N + \frac{1}{\beta}\left\{1 + \int_G N[\beta R(|u(x)|)]dx\right\},$$

所以由(19.27)

$$\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_N + \frac{1}{\beta}\left\{1 + N[\beta R(u_0)]\operatorname{mes} G + \frac{1}{\gamma}\int_G |u(x)|dx\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|_N + \frac{1}{\beta}\{1 + N[\beta R(u_0)]\operatorname{mes} G + \mu\|u\|_\Phi\},$$

其中 μ 是某一常数.

由此可見,当 $\|u\|_\Phi \leqslant r$ 时

$$\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leqslant C(r). \tag{19.31}$$

应用定理 15.4 的条件 a) 于綫性积分算子

$$\mathbf{A}v(x) = \int_G k(x, y)v(y)dy$$

(置 $M_1(u)=N(u)$, $M_2(u)=\Phi(u)$, $\Psi(u)=\Phi[M(u)]$), 則由(19.30)可証得算子 $\mathbf{A}$ 映空間 L_N^* 到空間 L_Φ 内并且連續,同时

$$\|\mathbf{A}v\|_\Phi \leqslant 2l\|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}}\|v\|_N. \tag{19.32}$$

由(19.28)

$$|\mathbf{K}u(x)| \leqslant \mathbf{A}[a(x) + R(|u(x)|)],$$

因而由(19.31)和(19.32)

$$\|\mathbf{K}u\|_\Phi \leqslant 2l\|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}}\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leqslant$$
$$\leqslant 2lC(r)\|k(x, y)\|_{\hat{\Psi}}.$$

至于算子(19.29)的連續性和列緊性,如同定理 19.1 的証明卽可証得.

定理証毕.

我們来研究簡单的例子. 設

$$|k(x, y, u)| \leqslant k(x, y)[a + \ln(|u| + 1)] \tag{19.33}$$

并且

$$\iint_G |k(x, y)| \ln(|k(x, y)| + 1)dx\,dy < \infty. \tag{19.34}$$

則算子(19.29)映某一奧尔里奇空間到它自己内并且全連續. 为証此,只須应用定理 19.2, 其中函数 $M(u) = (1 + |u|)\ln(1 + |u|) - |u|$.

8. 哈梅士坦算子. 我們来研究特殊类型的烏利孙算子

$$\mathbf{K}u(x) = \int_G k(x, y)f[y, u(y)]dy, \tag{19.35}$$

这种算子叫做哈梅士坦算子.

前面所找到关于烏利孙算子映某一奧尔里奇空間到它自己内并且全連續的条件,自然可以应用于算子(19.35)的研究. 不过在某些情况下为了研究这种算子可以利用其它的方法.

設 E_1 和 E_2 是两个巴拿哈空間. 假定算子 $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{f}u(x) = f[x, u(x)]$$

映某个球 $T \subset E_1$ 到空間 E_2 内并且在該球上連續有界. 又假定綫性积分算子

$$\mathbf{A}v(x) = \int_G k(x, y)v(y)dy$$

映 E_2 到 E_1 内并且連續．因为算子(19.35)可表成复合算子 $\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathfrak{f}$ 的形式，所以在所指出的条件下，显然它映球 T 到 E_1 内并且連續有界．假如算子 $\mathbf{A}$ 全連續，那末算子(19.35)同样也是全連續的．

作为 E_1 和 E_2 可以考虑两个奥尔里奇空間．在 § 17 中我們已經找到算子 $\mathfrak{f}$ 連續和有界的条件．把这些条件和算子 $\mathbf{A}$ 連續(§ 15)与全連續(§ 16)的条件联系起来即可給出哈梅士坦算子連續与全連續的充分条件．

§ 20. 某些存在定理

1. 研究的問題． 設 $\mathbf{A}$ 是映某个巴拿哈空間 E 到它自己內的算子，一般來說它是非綫性的．我們來指出在方程

$$\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi \tag{20.1}$$

的研究中所提出的某些問題．

第一个問題是寻找方程(20.1)对确定的 λ 值有解的条件．照例对于解的存在条件总希望再加上解唯一的条件．

在許多情况下，算子 $\mathbf{A}$ 具有这样的性質：$\mathbf{A}\theta = \theta$，其中 θ 是空間 E 的零元．此时方程(20.1)对参数 λ 的一切值有平凡解．在这种情况下有兴趣的是非零解．这样的解只对参数 λ 的个别值才存在．方程(20.1)的非零解通常称为算子 $\mathbf{A}$ 的**特征向量**(**特征函数**)．使方程(20.1)有非零解的数 λ 叫做算子 $\mathbf{A}$ 的**特征值**．

第二个問題是寻找算子 $\mathbf{A}$ 含有特征向量的条件．

非綫性算子 $\mathbf{A}$ 的特征值的全体(如同綫性算子一样)叫做它的譜．假如算子的譜填滿某个区間，則可推出該算子有連續統基数的特征向量．可能出現这样的情况，无穷多个(可数的或連續統基数的)特征向量对应于同一个特征值．

第三个問題是研究非綫性算子的譜以及特征向量集合的拓扑构造．

看来在相当广泛的假設下，特征向量的集合构成連續曲綫的样式；这种构造称为連續枝．我們引入相应的定义．集合 $\mathfrak{N} \subset E$ 叫做在球套 $a < \|u - u_0\| < b$ 内的**連續枝**，假如集合 $\mathfrak{N}$ 与任何包含球 $\|u - u_0\| \leqslant a$ 而又連同边界包含在球 $\|u - u_0\| < b$ 内的区域 $\mathfrak{M}$ 的边界 S 有不空交．

我們的主要兴趣是非綫性算子具有范数可以任意小的特征向量的条件．設 λ_0 是某个数，又設对每一个 $\varepsilon > 0$ 相应的有这样的 λ，使得 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 并且方程(20.1)对該 λ 值至少有一非零解 φ 滿足条件 $\|\varphi\| < \varepsilon$，則数 λ_0 称为非綫性算子 $\mathbf{A}$ 的**歧点**．

第四个問題是研究歧点．

为了解决所列举的問題（以及一系列我們沒有提到的其它問題），目前研究的特点是采用非綫性泛函分析的方法．应用一般的命題于具体方程(20.1)的研究，自然要求算子 $\mathbf{A}$ 具有某种确定的“良好”性质：是連續且有界的，而在其它情况下是全連續的，是可微的，是某个泛函的梯度等等．

由于应用非綫性泛函分析的普遍定理来研究具体的非綫性积分方程，这就要求我們作出这样的泛函空間，使得积分算子映該空間到它自己內并且具有这种或那种的“良好”性质．

在大多数已知的研究中，作为泛函空間 E 采用連續函数空間和空間 L^a．这种情况导出加到方程中的函数上的各种限制．应用奥尔里奇空間又导出其它的（有时更弱）限制并且还允許研究新的方程类．

把前几节的結果和非綫性泛函分析的一般命題联系起来，即可导出新的存在定理，特征向量定理，歧点的定理等等．

下面我們引入这种联系的几个例子．熟悉非綫性泛函分析的讀者，容易継續举出这样的例子．

2. 解的存在性． 証明存在定理的最普遍方法之一就是利用邵德尔的不动点原則．

邵德尔原則．**設全連續算子 $\mathbf{A}$ 映某巴拿哈空間的球 T 到它自己內，則在球 T 中至少可找到这样的一个元素 u_0，使得 $u_0 = \mathbf{A}u_0$．**

我們来研究方程

$$u(x)=\lambda\int_G k[x, y, u(y)]dy+f_0(x). \qquad (20.2)$$

假定满足这样的条件(参看 § 19),使得算子

$$\mathbf{K}u(x)=\int_G k[x, y, u(y)]dy \qquad (20.3)$$

成为定义在球 $T(\theta, \gamma; L_\Phi^*)$ 上并取值于 L_Φ^* 内的全連續算子. 又設

$$\sup_{\|u\|_\Phi\leqslant\gamma}\|\mathbf{K}u\|_\Phi=a.$$

假設 $f_0(x)\in L_\Phi^*$ 且 $\|f_0\|_\Phi=\delta<\gamma$, 则当

$$|\lambda|\leqslant\frac{\gamma-\delta}{a} \qquad (20.4)$$

时方程(20.2)右端所定义的算子映球 $T(\theta, \gamma; L_\Phi^*)$ 到它自己内:

$$\|\lambda\mathbf{K}u+f_0\|_\Phi\leqslant|\lambda|a+\|f_0\|_\Phi\leqslant\gamma \quad (\|u\|_\Phi\leqslant\gamma).$$

又算子 $\lambda\mathbf{K}u(x)+f_0(x)$ 全連續,因为算子 $\mathbf{K}$ 全連續.

由此可見,从邵德尔原则可推出:方程(20.2)对充分小的 λ 在空間 L_Φ^* 内至少有一个解.

如果算子 $\mathbf{K}$ 定义在整个空間 L_Φ^* 上,那末可以对各种不同半径 γ 的球来利用邵德尔原则. 在这种情况下,自然考虑这样半径的球,使得(20.4)右端得到尽可能大的值. 特别,方程(20.2)对一切 λ 有解,假如

$$\overline{\lim_{\gamma\to\infty}}\frac{\gamma}{\sup\limits_{\|u\|_\Phi\leqslant\gamma}\|\mathbf{K}u\|_\Phi}=\infty, \qquad (20.5)$$

因为当这个条件满足时,对每一个 λ 可选出充分大的 γ 使得(20.4)成立.

上面所进行的討論,例如使我們能够証明如下的結論:方程(20.2)对任何 λ 有解,假如满足定理 19.2 的条件并且 $f_0(x)$ 是可求和函数,其中 $N(v)$ 满足 Δ^2-条件.

事实上,取 N-函数 $\Phi(u)$ 满足 Δ'-条件,并使得一方面不等式(19.30)成立,另一方面 $f_0(x)\in L_\Phi^*$. 则方程(20.2)可看成在空間

L_Φ^* 内的算子方程.

仿定理 19.2 的証明卽得

$$\|\mathbf{K}u\|_\Phi \leqslant 2l\|k(x, y)\|_\psi\|a(x) + R(|u(x)|)\|_N \leqslant$$
$$\leqslant \alpha + \beta\|R(|u(x)|)\|_N \leqslant \alpha_1 + \beta_1\|N^{-1}(|u(x)|)\|_N.$$

因此为了証明等式(20.5)只須証

$$\lim_{\|u\|_\Phi \to \infty} \frac{\|N^{-1}(|u(x)|)\|_N}{\|u\|_\Phi} = 0. \tag{20.6}$$

因为 N-函数 $N(v)$ 满足 Δ^2-条件，所以(見(6.12))可找到这样的 u_0，使当 $u, v \geqslant u_0$ 时

$$N(u)N(v) \leqslant N(uv).$$

假設在上述不等式中 $N(u) = \rho$, $N(v) = t$，又对不等式两端取反函数 $N^{-1}(u)$，便知不等式

$$N^{-1}(\rho t) \leqslant N^{-1}(\rho)N^{-1}(t)$$

当 $\rho, t \geqslant \rho_0 = N(u_0)$ 时成立. 如果 $\rho \geqslant \rho_0$，而 $t < \rho_0$，那末

$$N^{-1}(\rho t) \leqslant N^{-1}(\rho\rho_0) \leqslant N^{-1}(\rho)N^{-1}(\rho_0).$$

由此可見，当 $\rho \geqslant \rho_0$ 时对一切 $t > 0$ 有不等式

$$N^{-1}(\rho t) \leqslant N^{-1}(\rho)N^{-1}(t) + N^{-1}(\rho)N^{-1}(\rho_0).$$

从这个不等式卽可推出当 $\rho \geqslant \rho_0$ 时

$$N^{-1}(|u(x)|) = N^{-1}\left(\rho\frac{|u(x)|}{\rho}\right) \leqslant$$
$$\leqslant N^{-1}(\rho)\left[N^{-1}\left(\frac{|u(x)|}{\rho}\right) + N^{-1}(\rho_0)\right]. \tag{20.7}$$

設

$$\|N^{-1}(|u(x)|)\|_N \leqslant a(\|u\|_\Phi \leqslant 1),$$

則从(20.7)可推出当 $\|u\|_\Phi = \rho \geqslant \rho_0$ 时

$$\|N^{-1}(|u(x)|)\|_N \leqslant$$
$$\leqslant N^{-1}(\rho)[a + N^{-1}(\rho_0)\|\kappa(x; G)\|_N] = bN^{-1}(\rho).$$

于是从上述不等式卽可推出(20.6)，因为

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{N^{-1}(\rho)}{\rho} = 0.$$

应用奥尔里奇空間所得到的方程(20.2)解的存在条件是不同

于利用空間 C 或 L^{α} (譬如見 [39a, б], [21д], [10]) 所出現的解的存在条件的. 如同前面我們已經指出过的那样,这是由于这种映奥尔里奇空間到它自己內并且全連續的烏利孙算子并不映空間 C 或 L^{α} 到它自己內.

譬如从定理 19.1 可推出方程(20.2)对充分小的 λ 有解,假如

$$\int_G \exp |f_0(x)|^{1+\beta_0} dx < \infty$$

并且(見(19.21)和(19.22))

$$|k(x, y, u)| \leqslant k(x, y) e^{a|u|}$$
$$(x, y \in G, -\infty < u < \infty), \tag{20.8}$$
$$|k(x, y)| \leqslant a |\ln r|^{1-\beta_0} + b. \tag{20.9}$$

此时解 $u(x)$ 属于空間 L_{Φ}^{*},其中 $\Phi(u) = e^{|u|^{1+\beta}}$ 的主部, $0 \leqslant \leqslant \beta < \beta_0$.

又譬如从定理 19.2 可推出方程 (20.2) 对一切 λ 有解, 假如 $f_0(x)$ 可求和并且(見(19.33)和(19.34))

$$|k(x, y, u)| \leqslant k(x, y)[a + \ln(|u| + 1)]$$
$$(x, y \in G, -\infty < u < \infty), \tag{20.10}$$

$$\iint_{\hat{G}} |k(x, y)| \ln(|k(x, y)| + 1) dx\, dy < \infty. \tag{20.11}$$

在空間 L^{α} 內,对我們指出的两个例子中的每一个来考慮算子(20.3)是不能不加另外的假定的. 其中的第一个是由于有"強的"非綫性的性質,而第二个是由于核 $k(x, y)$ 可以有"強的"奇异性.

为了証明解的存在定理,也可以应用其它的不动点原則.

3. 正特征函数. 巴拿哈空間 E 的凸閉集 $\mathfrak{K}$ 称为錐, 假如从 $u \in \mathfrak{K}$ 可推出 $tu \in \mathfrak{K}$ 对一切 $t > 0$ 成立, 又从 $u, -u \in \mathfrak{K}$ 可推出 $u = \theta$.

不难看出非負函数的全体在每一个奥尔里奇空間內构成錐.

記 $u_1 \leqslant u_2$, 假如 $u_2 - u_1 \in \mathfrak{K}$. 映空間 E 到它自己內的算子 $\mathbf{A}$ 称为正的,假如 $\mathbf{A}\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$. 算子 $\mathbf{A}$ 叫做单調的,假如从 $u_1 \leqslant u_2$ 可推出 $\mathbf{A}u_1 \leqslant \mathbf{A}u_2$.

我們已經知道許多关于正的全連續算子特征向量的存在条件[21][Д 第5章]. 所有这些条件都可以应用于映奥尔里奇空間到它自己內的算子.

我們記得普遍定理中有这样的一个.

設正的全連續算子 $\mathbf{K}$ 满足不等式

$$\mathbf{A}u \leqslant \mathbf{K}u(u \in \mathfrak{K}), \tag{20.12}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是正的綫性全連續算子且具有这样的性質,对任何 $u \in \mathfrak{K}$ $(u \neq \theta)$ 可找到正数 α, β 使得

$$\alpha u_0 \leqslant \mathbf{A}u \leqslant \beta u_0. \tag{20.13}$$

則算子 $\mathbf{K}$ 相应于正特征值 λ 的特征向量 u:

$$\mathbf{K}u = \lambda u \tag{20.14}$$

形成在錐 $\mathfrak{K}$ 内的无限长的連續枝,即在每一个包含 θ 而又落在錐 $\mathfrak{K}$ 內的有界域的边界上至少有算子 $\mathbf{K}$ 的一个特征向量.

設定理 19.1 的条件满足,又設 $k(x, y, u)$ 还满足下列的附加条件:

$$k(x, y, u) \geqslant a^2 u \quad (x, y \in G, u \geqslant 0), \tag{20.15}$$

其中 $a \neq 0$. 則算子 $\mathbf{K}$ 满足条件(20.12),在那里

$$\mathbf{A}u(x) = a^2 \int_G u(x)dx.$$

又易見算子 $\mathbf{A}$ 满足条件(20.13),其中 $u_0(x) \equiv 1$.

从上面所陈述的定理即可推出: 在这些条件下方程

$$\int_G k[x, y, u(y)]dy = \lambda u(x) \tag{20.16}$$

相应于可能的各个正参数 λ 值有連續統势的正解. 这些解形成在相应的奥尔里奇空間內的无限长的連續枝. 特別在該連續枝內有范数可任意小和范数可任意大的解.

譬如,为了使得方程(20.16)存在正解的連續枝,只須满足条件(20.8),(20.9)和(20.15).

4. 場位算子的特征函数. 算子叫做場位的,假如它是某个泛函的梯度. 我們已知一系列关于場位算子特征函数存在的定理.

利用奥尔里奇空間就可以应用这些定理来研究更为广泛的算子类. 这种利用按照下列方式进行.

設 $\mathbf{H}$ 是映 L^2 到奥尔里奇空間 L_Φ^* 内的綫性算子. 又設 $\mathbf{F}_1(u)$ 是 L_Φ^* 上(或該空間的某个球上)的实值泛函, 則 $\mathbf{F}(u) = \mathbf{F}_1(\mathbf{H}u)$ 是定义在 L^2 上(或在空間 L^2 的某个球上)的泛函. 假如算子 $\mathbf{H}$ 全連續,那末不难看出,泛函 $\mathbf{F}(u)$ 弱連續, 即它在每一个 L^2 内的弱收斂函数列上的值是收斂的.

如果泛函 $\mathbf{F}_1(u)$ 在奥尔里奇空間内可微,Γ_1 为其梯度算子,則泛函 $\mathbf{F}(u)$ 在 L^2 内也可微,它的梯度算子为

$$\Gamma = \mathbf{H}^*\Gamma_1\mathbf{H}, \tag{20.17}$$

其中 $\mathbf{H}^*$ 是 $\mathbf{H}$ 的共軛算子, 它映 L_Φ^* 的共軛空間到 L^2 内. 事实上,假如

$$\mathbf{F}_1(v+g) - \mathbf{F}_1(v) - (\Gamma_1 v, g) = \omega(v, g),$$

其中

$$\lim_{\|g\|_\Phi \to 0} \frac{|\omega(v, g)|}{\|g\|_\Phi} = 0,$$

則

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(u+h) - \mathbf{F}(u) - (\Gamma u, h) &= \\ &= \mathbf{F}_1(\mathbf{H}u + \mathbf{H}h) - \mathbf{F}_1(\mathbf{H}u) - (\Gamma_1\mathbf{H}u, \mathbf{H}h) = \\ &= \omega(\mathbf{H}u, \mathbf{H}h),\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{\|h\|_{L^2}\to 0} \frac{|\omega(\mathbf{H}u, \mathbf{H}h)|}{\|h\|_{L^2}} \leqslant \|\mathbf{H}\| \lim_{\|\mathbf{H}h\|_\Phi \to 0} \frac{|\omega(\mathbf{H}u, \mathbf{H}h)|}{\|\mathbf{H}h\|_\Phi} = 0.$$

假如 $u(x)$ 是方程

$$\mathbf{H}^*\Gamma_1\mathbf{H}u(x) = \lambda u(x) \tag{20.18}$$

的解,則 $\mathbf{H}u(x)$ 是方程

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^*\Gamma_1 v(x) = \lambda v(x) \tag{20.19}$$

的解.

由此可見,方程(20.19)各种解的存在定理的証明可以归結为方程(20.18)在 L^2 中解的存在定理的証明. 为了証明場位算子的方程在 L^2 中解的存在,我們可以应用以前已經指出过的各种一般結論[21]第6章].

在定理 16.8 和 18.1 的条件下，具有正定的对称核 $k(x, y)$ 的算子

$$\mathbf{K}u(x) = \int_G k(x, y)f[y, u(y)]dy \qquad (20.20)$$

可以表成 $\mathbf{K} = \mathbf{HH}^*\Gamma_1$ 的形式，其中 $\Gamma_1 = \mathfrak{f}$ 是某个泛函的梯度.

大家知道，每一个在 L^2 内弱連續的泛函的梯度恆有連續統势的特征向量. 因此，从前面所进行的討論可以推出：当定理 16.8 和 18.1 的条件满足时，方程

$$\int_G k(x, y)f[y, u(y)]dy = \lambda u(y)$$

有連續統势的特征向量，它們中的每一个相应于参数 λ 的某个值.

变分方法同样可以应用于解的存在定理的証明.

5. 歧点定理. 設全連續算子 $\mathbf{K}(\mathbf{K}\theta = \theta)$ 在零点 θ 处有弗力許导数 $\mathbf{B}$. 此时算子 $\mathbf{B}$ 同样是全連續的. 大家知道，綫性算子 $\mathbf{B}$ 的每一个奇数重的特征値是算子 $\mathbf{K}$ 的歧点.

为了把該結論应用于在某奥尔里奇空間內全連續的非綫性积分算子 $\mathbf{K}$ 的研究，我們必須知道算子 $\mathbf{K}$ 在此空間的零点处可微的条件.

譬如我們来研究算子(20.20). 它可以表成复合算子 $\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathfrak{f}$ 的形式，其中 $\mathbf{A}$ 是核 $k(x, y)$ 所定义的綫性积分算子. 假如算子 $\mathfrak{f}$ 映空間 $L^*_{M_1}$ 到空間 $L^*_{M_2}$ 內并且在零点 θ 处有弗力許导数 $\mathfrak{f}_1$:

$$\mathfrak{f}_1 u(x) = f'_u(x, 0)u(x),$$

而算子 $\mathbf{A}$ 映 $L^*_{M_2}$ 到 $L^*_{M_1}$ 內，則易見算子 $\mathbf{K}$ 在空間 $L^*_{M_2}$ 的零点 θ 处可微并且它的弗力許导数为

$$\mathbf{B}u(x) = \mathbf{A}\mathfrak{f}_1 u(x) = \int_G k(x, y)f'_u(y, 0)u(y)dy. \qquad (20.21)$$

把綫性积分算子全連續的条件（§ 16）和算子 $\mathfrak{f}$ 映 $L^*_{M_1}$ 到 $L^*_{M_2}$ 內并且在空間 $L^*_{M_1}$ 的零点 θ 处可微的条件（§ 18）联系起来，就得到核 $k(x, y)f'_u(y, 0)$ 的每一个奇数重特征値是算子（20.20）的歧点的条件.

主要結果汇集

凸 函 数

1. 設 $p(t)$ 和 $q(s)$ 是两个右連續的非下降函数 $(s, t > 0)$，并且在下述意义下"互逆"：

$$q(s) = \sup_{p(t) \leqslant s} t, \quad p(t) = \sup_{q(s) \leqslant t} s, \tag{1}$$

同时还满足条件

$$p(0) = q(0) = 0, \quad p(+\infty) = q(+\infty) = +\infty.$$

由等式

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt, \quad N(v) = \int_0^{|v|} q(s)ds \tag{2}$$

所确定的凸函数 $M(u)$ 和 $N(v)$ 称为互余的 N-函数。

下列各对函数是互余的 N-函数：

$$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha} \ (\alpha > 1),$$

$$N_1(v) = \frac{|v|^\beta}{\beta} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right),$$

$$M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1,$$

$$N_2(v) = (1 + |v|) \ln(1 + |v|) - |v|.$$

如果对較大的 u 有不等式 $M_1(u) \leqslant M_2(u)$，則其余 N-函数对較大的 v 满足相反的不等式：$N_2(v) \leqslant N_1(v)$.

对互余的 N-函数楊格不等式恆成立：

$$uv \leqslant M(u) + N(v). \tag{3}$$

此不等式成为等式仅当 u, v 满足如下的关系式：

$$|u| p(|u|) = M(u) + N[p(|u|)], \tag{4}$$

$$q(|v|)|v| = M[q(|v|)] + N(v). \tag{5}$$

2. 若对自变量較大的值有 $M_1(u) \leqslant M_2(ku)$，則記 $M_1(u) \prec\prec M_2(u)$. 假如 $M_1(u) \prec M_2(u)$ 或 $M_2(u) \prec M_1(u)$，則称 N–函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 是可比較的. 从 $M_1(u) \prec M_2(u)$ 可推出其余 N–函数有关系式 $N_2(v) \prec N_1(v)$.

N–函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 称为等价的(記作 $M_1(u) \sim M_2(u)$)，假如它满足 $M_1(u) \prec M_2(u)$ 和 $M_2(u) \prec M_1(u)$. 其余 N–函数等价的 N–函数也等价. 我們得到 N–函数等价的各种判别法.

对任何 N–函数列 $M_n(u)(n = 1, 2, \cdots)$ 可找到这样的 N–函数 $\Phi(u)$ 和 $\Psi(u)$，使对一切 n 恆有 $\Phi(u) \prec M_n(u) \prec \Psi(u)$.

3. 我們称 $M(u)$ 满足 Δ_2–条件，假如对自变量較大的值有不等式

$$M(2u) \leqslant kM(u). \tag{6}$$

满足 Δ_2–条件的 N–函数当自变量較大时必囿于某幂函数.

$M(u)$ 满足 Δ_2–条件的充要条件为

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{up(u)}{M(u)} < \infty. \tag{7}$$

$M(u)$ 满足 Δ_2–条件当且仅当其余 N–函数对自变量較大的值，满足不等式

$$N(v) \leqslant \frac{1}{2l} N(lv), \tag{8}$$

其中 $l > 1$.

下列函数是满足 Δ_2–条件的 N–函数：

$$M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}\ (\alpha > 1),$$

$$M_2(u) = (1 + |u|)\ln(1 + |u|) - |u|,$$

$$M_3(u) = |u|^\alpha(\ln|u| + 1)\ (\alpha > 1),$$

$$M_4(u) = \frac{u^2}{\ln(|u| + e)}. \tag{9}$$

$N(v) = e^{v^2} - 1$ 的余 N–函数 $M(u)$ 满足 Δ_2–条件；但它的明显表达式我們并不知道.

存在互余的 N–函数 $M(u)$ 和 $N(v)$，使得其中的任何一个都

不满足 Δ_2-条件.

4. 我們称 N-函数 $M(u)$ 满足 **Δ'-条件**, 假如对較大的 u 和 v 有

$$M(uv) \leqslant CM(u)M(v). \tag{10}$$

如果 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ'-条件, 那末它也一定满足 Δ_2-条件.

(9) 中的 N-函数 $M_1(u)$, $M_2(u)$, $M_3(u)$ 满足 Δ'-条件, 而 $M_4(u)$ 不满足 Δ'-条件.

若对每一个充分大的 u 来說, 函数

$$h(t) = \frac{p(ut)}{p(t)} \tag{11}$$

对較大的 t 是非上升的, 則 N-函数 $M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$ 满足 Δ'-条件.

若当 t 較大时 $p(t)$ 可微, 則 $M(u)$ 满足 Δ'-条件只須函数

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)} \tag{12}$$

对較大的 t 是非上升的. 如果 $g(t)$ 非下降, 那末 $M(u)$ 的余 N-函数满足 Δ'-条件.

5. 若 N-函数 $M(u)$ 等价于 $|u|M(u)$, 則称 $M(u)$ **满足 Δ_3-条件**.

满足 Δ_3-条件的 N-函数当自变量的值較大时它的增加速度比任何幂函数都快, 然而并非任何增加速度比一切幂函数都快的 N-函数恆满足 Δ_3-条件.

若 $M(u)$ 满足 Δ_3-条件, 則其余 N-函数 $N(v)$ 满足 Δ_2-条件并且对自变量較大的值有不等式

$$k_1vM^{-1}(k_1v) \leqslant N(v) \leqslant k_2vM^{-1}(k_2v), \tag{13}$$

其中 $M^{-1}(v)$ 是 $M(u)$ 的反函数.

若 $M(u)$ 满足 Δ_3-条件并且当自变量較大时有

$$2p^2(u) \geqslant M(u)p'(u), \tag{14}$$

則 $M(u)$ 的余 N-函数等价于对較大的 v 等于 $vM^{-1}(v)$ 的 N-函数.

例如若$M(u)=e^{u^2}-1$，则$N(v)$等价于对較大的v等于$v\sqrt{\ln v}$的N-函数.

若$M(u)$满足Δ_3-条件，则$M(u)\sim N[M(u)]$.

在满足Δ_3-条件的N-函数类中可分出一更窄的函数类，即满足Δ^2-条件：$M(u)\sim M^2(u)$. N-函数$M_1(u)=e^{|u|}-|u|-1$, $M_2(u)=e^{u^2}-1$就是这种函数的例子. 对較大的u等于$u^{\ln u}$的N-函数$M(u)$满足Δ_3-条件，但不满足Δ^2-条件.

$M(u)$满足Δ^2-条件，只須对自变量較大的値不等式$p^2(u)<$ $<p(ku)$成立. 又N-函数$M(u)$满足Δ^2-条件的充要条件为它的余N-函数$N(v)$当v較大时有

$$\frac{N(v)}{v}<k\frac{N(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}. \tag{15}$$

由此可見，从$M(u)$满足Δ^2-条件可推出余N-函数$N(v)$满足Δ'-条件.

若N-函数$M_1(u)$和$M_2(u)$的增加速度比任何冪函数都快，則在某些补充假設下复合函数$N_1[N_2(v)]$等价于N-函数$\frac{N_1(v)N_2(v)}{|v|}$；譬如$M_1(u)$和$M_2(u)$满足Δ^2-条件，則該結論成立.

6. 設N-函数$M(u)$当自变量的值較大时与形如

$$u^\alpha(\ln u)^{\gamma_1}(\ln\ln u)^{\gamma_2}\cdots(\ln\ln\cdots\ln u)^{\gamma_n}$$

的函数相等，其中$\alpha>1$，則$M(u)$的余N-函数$N(v)$等价于对較大的v等于

$$v^\beta[(\ln v)^{\gamma_1}(\ln\ln v)^{\gamma_2}\cdots(\ln\ln\cdots\ln v)^{\gamma_n}]^{1-\beta}$$

的N-函数，此处$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

奥尔里奇空間

1. 設G是有限維欧氏空間中的有界閉集，$M(u)$是一N-函数，則所有满足

$$\rho(u;M)=\int_G M[u(x)]dx<\infty \tag{16}$$

的函数 $u(x)$ 的集合称为奥尔里奇类.記作 $L_M = L_M(G)$.

任何在 G 上可求和的函数必属于某一奥尔里奇类.

奥尔里奇类是凸集. 类 L_M 成为綫性集的充要条件是 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件.

函数列 $u_n(x) \in L_M$ 称为平均收斂于 0,假如 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n; M)=0$.

2. 奥尔里奇类 L_M 的綫性包成为完全的賦范空間 L_M^*, 假如引进范数如下:

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v;N)\leqslant 1} \int_G u(x)v(x)dx; \tag{17}$$

我們把它叫做奥尔里奇**空間**. 空間 L_M^* 可分的充要条件是 N-函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件.

集合 $\mathscr{E} \subset G$ 的特征函数 $\kappa(x, \mathscr{E})$ 的范数可以根据下列公式加以計算:

$$\|\kappa(x, \mathscr{E})\|_M = \text{mes}\, \mathscr{E} \cdot N^{-1}(1/\text{mes}\, \mathscr{E}), \tag{18}$$

其中 $N^{-1}(u)$ 是 $M(u)$ 的余 N-函数 $N(v)$ 的反函数.

以下的公式可以用来計算范数:

$$\|u\|_M = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \int_G M[ku(x)]dx\right). \tag{19}$$

空間 L_M^* 中还可以引进与(17)等价的刘克施姆布洛格**范数**:

$$\|u\|_{(M)} = \inf k,$$

此处的下确界是对滿足关系式

$$\rho\left(\frac{u}{k}; M\right) = \int_G M\left[\frac{u(x)}{k}\right]dx \leqslant 1$$

的一切正数 k 来取的. 刘克施姆布洛格范数与奥尔里奇范数之間有不等式

$$\|u\|_{(M)} \leqslant \|u\|_M \leqslant 2\|u\|_{(M)}.$$

这两种范数的差别为一常数因子, 仅当 L_M^* 与某一 $L^\alpha(\alpha > 1)$ 一致.

3. 我們有不等式

$$\|u\|_M \leqslant 1 + \int_G M[u(x)]dx \tag{20}$$

和

$$\int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_M}\right]dx \leqslant 1. \tag{21}$$

若 $\|u\|_M \leqslant 1$，则

$$\int_G M[u(x)]dx \leqslant \|u\|_M. \tag{22}$$

对任何一对函数 $u(x) \in L_M^*$ 和 $v(x) \in L_N^*$，函数 $u(x)v(x)$ 必可求和并且 Hölder 不等式

$$\int_G u(x)v(x)dx \leqslant \|u\|_M\|v\|_N \tag{23}$$

成立.

欲使函数 $u(x) \in L_{M_1}^*$ 和 $w(x) \in L_\Phi^*$ 的乘积 $u(x)w(x)$ 属于 $L_{M_2}^*$，只須存在互余 N-函数 $R(u)$ 和 $Q(u)$，使对自变量較大的值有不等式

$$\begin{aligned} R(\alpha u) &< M_2^{-1}[M_1(u)], \\ Q(\alpha u) &< M_2^{-1}[\Phi(u)]. \end{aligned} \tag{24}$$

若 $M_2(u)$ 满足 Δ'-条件，則只須对自变量較大的值有不等式

$$\begin{aligned} R(\alpha u) &< M_1[M_2^{-1}(u)], \\ Q(\alpha u) &< \Phi[M_2^{-1}(u)]. \end{aligned} \tag{25}$$

在上述情况下不等式

$$\|u(x)w(x)\|_{M_2} \leqslant k\|u(x)\|_{M_1}\|w(x)\|_\Phi$$

恆成立.

以 $\hat{L}_M^*$ 表示空間 $L_M^*(\hat{G})$，其中 $\hat{G}$ 是拓扑积 $G \times G$. 則任意一对函数 $u(x)$，$v(x) \in L_M^*$ 的乘积 $u(x)\ v(y)$ 属于 $\hat{L}_M^*$ 的充要条件为 N-函数 $M(u)$ 满足 Δ'-条件. 此时恆有不等式

$$\|u(x)v(y)\|_{\hat{M}} \leqslant c\|u\|_M\|v\|_M.$$

4. 从函数列 $u_n(x)$ 按空間 L_M^* 的范数收斂于函数 $u_0(x)$ 可推出叙列 $u_n(x) - u_0(x)$ 平均收斂于 0. 按范数收斂与叙列 $u_n(x) - u_0(x)$ 平均收斂于 0 等价的充要条件为 $M(u)$ 满足 Δ_2-条件.

5. 假如 $M(u)$ 不满足 Δ_2-条件，則所有有界函数的集合在空間 L_M^* 中到处不稠密. 我們把所有有界函数的集合在 L_M^* 中的閉

包記作 E_M，这个空間是起着重要的作用. 如果 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件，則它与 $L_M^* = L_M$ 重合.

E_M 可分并且有基底.

函数 $u(x) \in L_M^*$ 属于 E_M 的充要条件为它的范数是絕对連續的. 范数的絕对連續性指的是对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使当 $\mathrm{mes}\, \mathscr{E} < \delta(\mathscr{E} \subset G)$ 时有

$$\|u(x)\kappa(x; \mathscr{E})\|_M < \varepsilon.$$

若 $p(u) = M'(u)$ 連續，則 E_M 中的函数的范数可通过下面的公式来計算:

$$\|u\|_M = \int_G p(k^*|u(x)|)|u(x)|\,dx, \tag{26}$$

其中 k^* 是由以下的方程:

$$\int_G N[p(k^*|u(x)|)]\,dx = 1 \tag{27}$$

所确定.

借助于空間 E_M，我們能够描述类 L_M 在空間 L_M^* 中的位置：类 L_M 包含所有滿足 $\inf\limits_{w \in E_M} \|u - w\|_M < 1$ 的函数 $u(x)$ 的集合 Π，并且包含在它的閉包 $\bar{\Pi}$ 內. 若 E_M 是空間 L_M^* 的眞子空間 ($M(u)$ 不滿足 Δ_2-条件)，則 Π 是 L_M 的眞子空間，而 L_M 是 $\bar{\Pi}$ 的眞子空間.

6. 在十分自然的假定下，奥尔里奇范数和刘克施姆布洛格范数在空間 E_M 中(在空間 $L_M^* = L_M$ 中，当 $M(u)$ 滿足 Δ_2-条件时)可微.

設 $M(u)$ 的余 N-函数 $N(v)$ 滿足 Δ_2-条件，又設 $M(u)$ 有連續单調的二阶导数并且当 $u \neq 0$ 时是正的，則奥尔里奇范数是 E_M 上的可微泛函. 奥尔里奇范数的梯度 $\mathbf{\Gamma}$ 由下式确定:

$$\mathbf{\Gamma} u(x) = p(k^* u(x)), \tag{28}$$

其中

$$\int_G N[p(k^*|u(x))]\,dx = 1.$$

又刘克施姆布洛格范数 $\|u\|_{(M)}$ 的梯度 $\mathbf{\Gamma}_1$ 由下式确定:

$$\Gamma_1 u(x) = \frac{p\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right)}{\int_G p\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right)\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}dx}. \tag{29}$$

7. 我們称函数族 $\mathfrak{M}\subset L_M^*$ 有等度絕对連續的范数，假如对任何 $\varepsilon>0$，可找到这样的 $\delta>0$，使当 $\operatorname{mes}\mathscr{E}<\delta$ 时对 $\mathfrak{M}$ 中的一切函数有 $\|u(x)\kappa(x;\mathscr{E})\|_M<\varepsilon$.

依测度收斂的函数列 $u_n(x)\in E_M$ 在范数意义下收斂的充要条件为它具有等度絕对連續的范数. 由此可見，函数族 $\mathfrak{M}\subset E_M$ 在 L_M^* 中列紧，假如它具有等度絕对連續的范数并且在依测度收斂的意义下列紧.

哥尔莫果洛夫 (A. H. Колмогоров) 和黎斯 (F. Riesz) 的著名的列紧性判别法可推广到空間 E_M 中的函数族.

8. 一般来說，不同的 N-函数确定不同的奥尔里奇空間.

在集合論的包含意义下有 $L_{M_1}^*\subset L_{M_2}^*$ 的充要条件为关系式 $M_2(u)\prec M_1(u)$ 成立. 此时恆有

$$\|u\|_{M_2}\leqslant q\|u\|_{M_1}\quad (u(x)\in L_{M_1}^*). \tag{30}$$

空間 $L_{M_1}^*$ 和 $L_{M_2}^*$ 由相同的函数組成的充要条件为 $M_1(u)\sim\sim M_2(u)$. 又等价的 N-函数所生成的范数亦等价.

泛函和算子

1. 空間 E_M 上綫性泛函的一般表达式由公式

$$l(u)=\int_G u(x)v(x)dx \tag{31}$$

給出，其中 $v(x)\in L_N^*$. 泛函 l 的范数与函数 $v(x)$ 的刘克施姆布洛格范数 $\|v\|_{(M)}$ 一致.

若 $M(u)$ 不滿足 Δ_2-条件，則 L_M^* 上存在綫性泛函，它不能写成积分表达式(31).

空間 L_M^* 自反的充要条件为 $M(u)$ 和余函数 $N(v)$ 滿足 Δ_2-条件.

2. 在空間 L_M^* 内引进了 E_N-弱收斂：若对每一个 $v(x)\in E_N$,

数列 $\int_G u_n(x)v(x)dx$ 恆收斂，則称函数列 $u_n(x)\in L_M^*$ 为 E_N-弱收斂. 由函数列的 E_N-弱收斂性可推出該叙列元素的范数的有界性.

任何奥尔里奇空間是 E_N-弱完全和 E_N-弱列紧的,空間 E_M 不具有这些性质,空間 E_M 的 E_N-弱閉包是整个空間 L_M^*.

从依測度收斂和按范数的有界性可推出 E_N-弱收斂性.

3. 我們找出了綫性积分算子

$$\mathbf{A}\varphi(x)=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy \tag{32}$$

映一奥尔里奇空間到另一奥尔里奇空間内連續和全連續的各种判别法. 主要結果述之如下:

設 $\Phi(u)$ 和 $\Psi(v)$ 是互余 N-函数，又設核 $k(x,y)$ 属于 $\hat{L}_{\Psi}^*$. 若滿足下列条件之一:

а) $M_2[N_1(v)]\prec\Psi(v)$;

б) $N_1[M_2(v)]\prec\Psi(v)$;

в) 函数 $\Phi(u)$ 滿足 Δ'-条件并且

$$M_2(v)\prec\Psi(v),\quad N_1(v)\prec\Psi(v),$$

則算子(32)映空間 $L_{M_1}^*$ 到空間 $L_{M_2}^*$ 内并且連續.

在上述定理的条件中,如果核 $k(x,y)$ 属于 $\hat{E}_{\Psi}$($\hat{G}$ 上所有有界函数的集合在 $\hat{L}_{\Psi}$ 中的閉包),則算子(32)全連續. 此时算子(32)将 $L_{M_1}^*$ 中 E_{N_1}-弱收斂的函数列变成 $L_{M_2}^*$ 中按范数收斂的叙列.

4. 設 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数并且 $N(u)\prec u^2\prec M(u)$,又設 L^2 中的正定自共軛綫性連續算子 $\mathbf{A}$ 的平方 $\mathbf{A}^2$ 可以連續地开拓成映 E_N 到 L_M^* 内的算子,則算子 $\mathbf{A}$ 映 L^2 到 L_M^* 内并且連續.

在上述定理的条件中，如果算子 $\mathbf{A}^2$ 的扩张是映 E_N 到 L_M^* 内的全連續算子,則算子 $\mathbf{A}$ 是映 L^2 到 L_M^* 内的全連續算子.

由这些結論可推出将映 E_N 到 L_M^* 内的綫性算子 $\mathbf{A}$ 分解成乘积 $\mathbf{A}=\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ 的各种条件,其中 $\mathbf{H}$ 映 L^2 到 L_M^* 内，而 $\mathbf{H}^*$ 是 $\mathbf{H}$ 的共軛算子,它映 E_N 到 L^2 内.

5. 我們研究了算子 $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{f}u(x)=f[x,u(x)],$$

其中 $f(x,u)(x\in G,\ -\infty<u<\infty)$ 对几乎所有的 x 关于变量 u 連續并且对每一个 u 关于变量 x 可测. 找出了算子 $\mathfrak{f}$ 映空間 $L_{M_1}^*$ 的某一区域到 $L_{M_2}^*$ 內并且連續有界的条件. 与空間 L^α 的情况不同,算子 $\mathfrak{f}$ 可以是定义在某一球上,而不在整个空間上定义. 它可在某一有界閉域上处处連續,但不在該区域上有界.

我們陈述有关算子 $\mathfrak{f}$ 的性質的若干命題.

以 Π_r 表示所有与 E_{M_1} 的距离小于 r 的函数 $u(x)\in L_{M_1}^*$ 的集合,設算子 $\mathfrak{f}$ 映 Π_r 到 E_{M_2} 內,則它在 Π_r 的每一点連續,并且在球 $\|u\|_{M_1}\leqslant r_1<r$ 上的值的集合按 $L_{M_2}^*$ 的范数有界.

算子 $\mathfrak{f}$ 的連續性和有界性的具体条件可由 $f(x,u)$ 增加速度的估計式給出. 若

$$|f(x,u)|\leqslant b(x)+aQ^{-1}\left\{M_2^{-1}\left[M_1\left(\frac{u}{r}\right)\right]\right\}$$

$$(x\in G,\ -\infty<u<\infty),\tag{33}$$

其中 $b(x)\in E_{M_2}$, $Q(u)$是某一 N-函数, $a,r>0$, 則算子 $\mathfrak{f}$ 映 Π_r 到 E_{M_2} 內, 在 Π_r 的一切点連續, 并且在每一个球 $\|u\|_{M_1}\leqslant r_1<r$ 上有界. 当 $M_2(u)$ 滿足 Δ_2-条件时在(33)中可以取 $Q(u)=u$.

6. 設存在互余 N-函数 $R(u)$ 和 $Q(u)$,使对自变量較大的值不等式(24)成立,或当 $M_2(u)$ 滿足 Δ'-条件时不等式(25)成立; 又設导数 $f'_u(x,u)$ 存在,并且它确定了映球 $\|u\|_{M_1}\leqslant r$ 到 L_Φ^* 內的一个連續算子 $\mathfrak{f}_1$: $\mathfrak{f}_1u(x)=f'_u[x,u(x)]$; 則算子 $\mathfrak{f}$ 在該球中的每一个內点按 Frechet 意义可微, 而且在点 $u(x)$ 处的 Frechet 微分 $\mathbf{B}h$ 为

$$\mathbf{B}h(x)=f'_u[x,u(x)]h(x).$$

更精致的是算子 $\mathfrak{f}$ 在孤立点,而不是在区域上可微的条件.

7. 非綫性积分算子

$$\mathbf{K}\varphi(x)=\int_G k(x,y)f[y,\varphi(y)]dy\tag{34}$$

可看作非綫性算子 $\mathfrak{f}$ 和綫性积分算子(32)的复合算子. 結合算子

f 映空間 $L^*_{M_1}$ 到空間 $L^*_{M_2}$ 內并且在某一球上連續有界的条件和算子(32)映 $L^*_{M_2}$ 到 $L^*_{M_1}$ 內并且全連續的条件就得到算子(34)在空間 $L^*_{M_1}$ 內全連續的条件.

建立了更一般的非綫性积分算子

$$\mathbf{K}\varphi(x) = \int_G k[x, y, \varphi(y)]dy \tag{35}$$

在奥尔里奇空間內全連續的条件.

这些条件使我們能对某些实質上非冪，非綫性的算子选择奥尔里奇空間,使得它們在該空間內全連續.

例如,設

$$|k(x, y, u)| \leqslant k(x, y)[a(x) + R(|u|)]$$
$$(x, y \in G, -\infty < u < \infty),$$

其中 $k(x, y) \in \hat{E}_M$, $a(x) \in L^*_N$, $R(u)$ 是非負的連續函数,$M(u)$ 滿足 Δ^2–条件(譬如增加速度如同 e^u);又設对自变量較大的値有

$$R(\gamma u) \leqslant KM(u).$$

在这些假定下算子(35)映空間 L^*_M 的某一球到 L^*_M 內并且全連續.

还証明了非綫性积分算子的一批其它性質.

8. 熟悉了积分算子(35)在其上具有良好性質(連續，全連續,可微,場位型等等)的空間,就可以用非綫性泛函分析的一般方法来研究方程

$$\lambda\varphi(x) = \int_G k[x, y, \varphi(y)]dy. \tag{36}$$

应用这些方法可以导出解和固有函数的存在定理，歧点定理以及譜的构造等等. 所証定理的特点在于討論的方程的非綫性可以带来实質上非冪的特征.

文 献 索 引

§§ **1, 2.** 凸函数理論的基本概念是 Jensen[11] 建立的，其(特别 N-函数)理論初步的詳細叙述讀者可在 [58]，[41]，[12] 中找到。

我們所采用的通常的 N-函数的定义与 Orlicz 和 Birnbaum[4] 的 N'-函数的定义一致。

§ **3.** Orlicz 和 Birnbaum[4] 称 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 等价，假如对自变量較大的值有

$$aM_1(u) \leqslant M_2(u) \leqslant bM_1(u).$$

在这种意义下的等价性說明，N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 确定相同的 Orlicz 类（見 § 8），而在我們定义[2a] 下的等价性說明 N-函数 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 确定由相同的函数构成的 Orlicz 空間。

§§ **4, 5.** 满足 Δ_2-条件和 Δ'-条件的 N-函数类看来首先是在 Orlicz 和 Birnbaum 的工作[4]中引进的。但他們对滿足这些条件的判别法并不很感兴趣。

在 §§ 4, 5 中所給出的命題系不久前刊載于[25e, ж]的結果。与定理 4.2 相近的結論，С. М. Лозинский[31]（在 $N(v)$ 满足 Δ_2-条件的补充假定下)已得到1)。

直到現在尙未找到滿足 Δ'-条件的充分显明而又有效的充要判别法；如能找出利用余 N-函数来表达的判别法，則将是有价值的。

§ **6.** 本节所陈述的命題补充了不久前发表于[25в, е, и]的結果。

我們还不知道利用余 N-函数 $N(v)$ 来表达 N-函数 $M(u)$ 滿

1) С. М. Лозинский 閱讀本书的原稿时，亲切的把他所找到滿足 Δ_2-条件的一系列判别法告訴作者。这些研究是将近十年以前进行的，但始終未发表。

足 Δ_3-条件的方便的判别法，希望能够得到与定理 6.8 的形式相类似的判别法.

借助于与 Δ^2-条件相类似的条件，可以分出更窄一些的增加速度很快的 N-函数类. 譬如，我們称 N-函数 $M(u)$ 満足 Δ_Φ-条件，假如 $\Phi[M(u)]\sim M(u)$，其中 $\Phi(u)$ 是某一确定的 N-函数. 可以証明満足任何 Δ_Φ-条件的 N-函数类是不空的，例如若 $\Phi(u)$ 的主部等于 $e^{\ln^2 u}$，$M(u)$ 的主部等于 e^{e^u}，則显然有 $\Phi[M(u)]\sim M(u)$；但満足 Δ_Φ-条件的 N-函数类的研究还沒有进行.

§ 7. 这一节的結果已陈述于 [25г]，而且那里是針对稍許更一般的 N-函数类来討論的.

§ 8. 我們所考虑的函数类在 Orlicz 和 Birnbaum[4] 的工作中已經詳尽地研究过(同样可参看[62]). 許多作者的一系列工作(譬如[12]，[14]，[18]，[20]，[31]，[36])中，主要是針对函数論問題(級数論，奇异积分，逼近論等等)应用了 Orlicz 类和 Orlicz 空間. Канторович 又将 Orlicz 类用于半序空間理論[15].

还应該指出日本数学家 Nakano, Jamamuro 等人关于模空間理論的工作[37], [61], [1] 与 Orlicz 类和 Orlicz 空間是有联系的.

§ 9. 空間 L_M^* 是 Orlicz 在[40a]中引进的，該文是在 N-函数 $M(u)$ 満足 Δ_2-条件的假定下来研究空間 L_M^* 的. 移去这个假設，空間 L_M^* 的一批性质在[40б]和[12]中得到証明.

由公式(9.18)所定义的范数是 Luxemburg[32] 引入的，利用类似的公式可在模空間内引进范数(見[37]，[63]).

許多作者(例如参看[12]，[32]，[49б])都討論过由定义在无限測度的集合和不連續測度的集合上的函数构成的 Orlicz 空間. 特別当集合是一点列并且其中的每一点的測度均为 1 时，Orlicz 空間成为数列空間，我們把它記作 l^M，它是空間 l^p 的推广. 这种空間 Orlicz[40б] 和后来年青的"喀山"数学家 Ю. И. Грибанов 都曾經研究过. N. Dinculeanu[9a,б] 討論过抽象函数的 Orlicz 空間.

§ 10. 空間 E_M 是在[25б, д, e]中引进并加以研究的. [40б]給出 Orlicz 空間可分的充要条件. 定理 10.1 和 10.3 的証明是出

現于論文[25б, е]之中. 第7段是作者們与 Н. Г. Шимко 合写的.

§ 11. Takahashi[52] 在 N–函数 $M(u)$ 满足 Δ_2–条件的假定下,将空間 L^p 的函数族的列紧条件的 Колмогоров 定理拓广到 Orlicz 空間;更精确的說,定理 11.2 就属于这种推广. 定理 11.3 在空間 L^p 的情况下[21в]中已給出. 定理 11.4 是 F. Riesz 关于空間 L^p 的相类似定理[41]的推广, 它是由 Ю. И. Грибанов[8] 証明的,还应該指出与定理 11.4 相近的結論可看作由 Г. Е. Шилов[6:б] 所証明的一种一般的列紧判别法的直接推論.

設 R 是由定义在交换重緊致羣 H(它的运算記作加法)上的复值函数构成的綫性賦范空間,根据 Г. Е. Шилов[6:а], 如果对每一个 $f(t)\in R$ 而言,它的一切位移 $f(t+h)$ 均属于 R 并且有

$$\|f(t+h)\| = \|f(t)\| \quad (f(t)\in R,\ h\in H)$$

和

$$\lim_{h\to 0}\|f(t+h)-f(t)\| = 0 \quad (f(t)\in R),$$

則称 R 是齐性的函数空間.

Г. Е. Шилов 定理. 集合 $\mathfrak{M}$ 在齐性的函数空間 R 中列紧的充要条件为 $\mathfrak{M}$ 是 R 的有界集, 并且 $\mathfrak{M}$ 的元素关于位移是等度連續的.

等度連續性指的是下列性質: 对任何 $\varepsilon>0$ 可找到羣 H 的零元素的邻域 U, 使得从 $h\in U$ 可推出 $\|f(t+h)-f(t)\|<\varepsilon$ 对一切 $f(t)\in\mathfrak{M}$ 成立.

Шилов 定理的証明是利用羣上的調和分析.

И. П. Натансон 指出 Tamakin[54] 是錯誤的証明了 А. Н. Колмогоров 关于 L^p 空間的函数族的列紧性定理中的第一个条件不依賴于該定理的其它条件. 最近 В. Н. Судаков 証明了 А. Н. Колмогоров 定理以及它在空間 L (А. Н. Тулайков[53]) 和 Orlicz 空間的拓广中函数族的范数有界的条件是其它条件的必然推論,因而可以删去.

§ 12. Orlicz[43а] 指出了当 $M(u)$ 满足 Δ_2–条件时 Haar 函数

构成空間 L_M^* 的基；M. З. Соломяка 的文章[51]中又証明了在可分的 Orlicz 空間中由 Haar 函数构成的基具有正交性，换言之級数(12.3)的部分和满足不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+m} c_i\varphi_i(x)\right\|_M \geqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)\right\|_M.$$

在 § 12 中引入的 L_M^* 可分性的必要条件的第二种証明是采用于論文[26a]，証明中利用定义在区間上的函数的空間作为过渡的方法可以应用于許多其它命題的証明，也就是說有一系列的章节可以仅限于討論定义在区間上的函数的 Orlicz 空間；作者不这样做的原因是在于討論任意有連續測度的集合 G 并不引起附带的困难.

任何有有限連續測度的集合可以一对一的映照到区間上，使得在此映象下不改变每一个子集的測度，这事实的証明参看[45].

§ 13. 本节的部分結果已在 [25a, г, e] 中陈述过.

§ 14. 空間 L_M^* 上綫性泛函的一般表达式定理，在 N–函数 $M(u)$ 滿足 Δ_2–条件的情形下，于[40a]中已証明；又[40б]已經証明了定理 14.1，当 $M(u)$ 不滿足 Δ_2–条件时，E_M 上綫性泛函的一般表达式定理在[25д]中已証出(同样可参看[32])，但 L_M^* 上綫性泛函的一般表达式問題尚未解决.

[32]証明了綫性泛函的范数与生成它的函数的 Luxemburg 范数之間的联系的定理. Д. В. Салехов[47a, б] 詳細的研究了函数 $k(v)$.

Amemiya 的工作 [1] 中借助于模空間理論研究了 Luxemburg 范数与由公式(10.11)确定的范数間的关系；如果这两种范数的差别仅为常数因子，那末所論的空間必为 L^p. 由于定理 10.5 公式(10.11)确定了通常的 Orlicz 范数，而 Luxemburg 范数与它生成的綫性泛函的范数一致(見第 5 段)，所以由 Amemiya 的結果也可推出在 121 頁所陈述的 Д. В. Салехов 定理.

因为我們还不知道 L_M^* 上綫性泛函的一般表达式，所以研究通常的弱收斂并不方便，因而研究把 L_M^* 看成 E_N 上的綫性泛函而

引进的弱收斂是适宜的.

§§ **15,16.** 我們指出了綫性积分算子的大量研究工作中的某些成果. Radon[42] 对連續函数空間 C 的綫性积分算子进行了最詳尽的分析. 对 L^p 空間的最簡单的定理見[3],[44].

С. Л. Соболев 和 В. И. Кондрашев 的工作中已經研究过特殊类型的綫性积分算子(所謂場位型算子)(見[50]). Д. В. Канторович[15] 得到映 L^p 到它自己內的积分算子的更強的結果, 拓广了 С. Л. Соболев 和 В. И. Кондрашев 的工作.

Zaanen[60] 証明了一批有关映 Orlicz 空間到它自己內的綫性积分算子的定理, 作者們的論文[25б, ж]又专門研究了映 Orlicz 空間到它自己內的綫性积分算子, 它的发展构成 §§ 15, 16 的基本內容.

定理 16.3 Zaanen 在假定 N-函数滿足 Δ_2-条件的情况下已經証明过.

自然期望遵循 Канторович[15] 研究映 L^p 到它自己內的算子的途徑可得到綫性积分算子映 Orlicz 空間到另一 Orlicz 空間內連續和全連續的新的条件. 在这些新的条件中看来必須将核限制如下: 存在函数 $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $R_1(u)$ 和 $R_2(u)$ 使得

$$\varphi(x) = \int_G R_1[k(x, y)]dy \in L^*_{\Phi_1}$$

和

$$\psi(y) = \int_G R_2[k(x, y)]dx \in L^*_{\Phi_2}$$

成立.

此时核 $k(x, y)$ 所定义的綫性积分算子映 $L^*_{M_1}$ 到 $L^*_{M_2}$ 內. 函数 $M_1(u)$, $M_2(u)$ 与函数 $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$, $R_1(u)$, $R_2(u)$ 之間必有某关系式(暂时还不知道)相联系.

[21в]中指出綫性算子分解的最初几个定理(同样可参看[21д]). 对 Orlicz 空間綫性算子分解的最初几个定理是在[21г]中給出, 并且詳尽地陈述于[25з], [5в, г], [22], [26б], [49в]得到綫性算子分解的一系列定理. 本书关于綫性算子分解定理的証

明方法是采用于[22]. 注意在定理 15.5 和 16.7 中可以不假設(参看[22])算子 **A** 自共軛，此时定理的条件必須对 **AA*** 滿足，而不是对 **A**² 滿足.

从关于場位型算子的定理 16.9 依照熟知的步驟[53],[15]可推出嵌入定理的补充. 又 Е. П. Калугина[11а,б] 給出 С. Л. Соболев, В. И. Кондрашев 和 С. М. Никольский 应用 Orlicz 度量的嵌入定理的另外补充.

§ 16 第 3 段系取材于[46в].

§ **17.** 在[17]中首先应用 Caratheodory 条件来研究非綫性算子.

定理 17.1 拓广了可測函数 C-性質的 Н. Н. Лузин 定理，看来該定理首先是在[23]中得到証明的.

对各种泛函空間（特别对 L^p 空間）算子 $\mathfrak{f}$ 已由許多作者研究过(例如見[39а], [21д], [5б, г]). 对 Orlicz 空間算子 $\mathfrak{f}$ 的連續性和有界性的基本命題是在[46а, б], [25з]中給出. 第 2—6 段叙述了这些命題的稍为更一般的形式.

定理 17.8 是采用于[45в].

§ **18.** 有許多的作者利用过泛函 (18.6) ([6], [7], [21д], [5а, г], [49а], [46б] 等等). 对 L^p 空間定理 18.1 А. И. Позолочкий (参看[21б])已給予証明. 又泛函(18.6)定义在 Orlicz 空間上的情形,在[46б]和后来的[25з]中已討論过.

在[35], [59], [5а]中叙述了泛函空間微分学的一般事实,映 Orlicz 空間到它自己內的算子 $\mathfrak{f}$ 可微性的部分定理,不久前已刊載于[25в, з]. 又在 L^p 空間內算子 $\mathfrak{f}$ 的可微性的研究已发表于文章[5б]中. Orlicz 范数和 Luxemburg 范数的梯度公式(見 [25к]) 是 L^p 范数的梯度的 Mazur 公式的推广.

§ **19.** 該节所証明的定理是[23] (同样可参看[21д]) 中某些命題的拓广. [25з]对映 Orlicz 空間到它自己內的 Hammerstein 算子进行了討論，这討論是建立在将这种算子表为 $\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathfrak{f}$ 的基础上.

映其它泛函空間到它自己內的各种非綫性积分算子的研究，已在許多工作中进行过([7], [10], [11], [5г], [21д], [39a, б], [29]等等).

§ **20.** 譬如 [39б], [21д], [30] 都提供了非綫性泛函分析的一般方法.

本节引用了[21д]中所証明的一切命題.

第 2 段中所叙述的弱非綫性方程解的存在性定理的基础是 B. M. Дубровский 在[11]中用于研究其它类积分方程的方法.

Banach 空間的錐体理論基本上是 M. Г. Крейн 发展起来的([28] 陈述了这个理論的基本命題), 它有相当大的一部分是与半序空間理論相交叉的(見[16]).

第 3 段中所利用的正固有函数的連續枝的一般定理是具有单調余子式的算子的更一般定理(見[21д])的特殊情形.

应用变分方法来研究 Hammerstein 算子的方程是在工作[6], [7]中开始的. 第 4 段中所叙述的将算子 **A** 分解成乘积 **HH*** 的方案是属于作者之一的, 这种方案应用于 L^p 空間的詳細情况見[21д],又它对 Orlicz 空間的应用可参看[46б]和后来的[25з].

附註. 最近得到一批有关 Orlicz 空間的新成果(例如[64—71]).

B. C. Виденский[66] 发現了 N-函数理論与整函数理論之間的有趣的联系. 特别他証明了 $N(v) \sim \ln \sum \exp[nv - M(n)]$, 其中 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是任意的互余 N-函数.

[69] 中証明了所有使得 $M^{-1}[u(x)]$ 可求和的函数 $u(x)$的集合构成环的充要条件为 $M(u)$ 滿足 Δ^2-条件.

参考文献

1. Амемия (Amemiya J.), A characterization of the modulars of L_p type, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. 1, 13 (1954).

2. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.

3. Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

4. Бирнбаум и Орлич (Birnbaum Z. und Orlicz W.), Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Stud. Math., 3 (1931).

5. Вайнберг М. М., а) Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах, УМН 7, вып. 4 (1952).

б) Оператор В. В. Немыцкого, Укр. матем. журнал 7, 4 (1955).

в) О некоторых свойствах квадратичных форм в пространствах L^q, ДАН СССР 100, № 5 (1955).

г) Вариационные методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1957.

6. Гаммерштейн (Hammerstein A.), Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, Acta Math. 54 (1929).

7. Голомб (Golomb M.), а) Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen, Math. Zeitschrift 39 (1934).

б) Über Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen, Publ. Mathem. de l'université de Belgrade, v. V (1936).

8. Грибанов Ю. И., Нелинейные операторы в пространствах Орлича, Уч. зап. Казанского ун-та 115, 7 (1955).

9. Динкуляну Н. (Dinculeanu N.), а) Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis. mat. e natur. 22, 2 (1957).

б) Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Fonctionelles ineal - res continues. Atti Accad. naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. e natur. 22, 3 (1957).

10. Драгони (Dragoni G.), Sui sistemi di equazioni integrali non lineari, Rend. Semin. mat. Univ. Padova VII (1936).

11. Дубровский В. М., О некоторых нелинейных интегральных уравнениях, Уч. зап. МГУ, 30 (1939).

12. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.

13. Иенсен (Jensen J. L. W. V.), Sur les founctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. 30 (1906).

14. Калугина Е. П., а) Выпуклые функциональные многообразия, диссертация, ЛГУ, 1952.

б) О классах $H_{\Phi}^{(r_1, \ldots, r_n)}$, ДАН СССР 96, 1 (1954).

в) Класс L_{Φ} как выпуклое функциональное многообразие. ДАН СССР 98, 1 (1954).

15. Канторович Л. В., Об интегральных операторах, УМН 11, вып. 2 (1956).

16. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах., М.— Л., Гостехиздат, 1950.

17. Каратеодори (Caratheodory C.), Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin, 1918.

18. Киприянов И. А., а) О суммировании интерполяционных процессов для функций двух переменных, ДАН СССР 95, № 1 (1954).

б) О сходимости и суммировании тригонометрических интерполяционных полиномов для функций двух переменных, ДАН СССР 97, № 6 (1954).

19. Колмогоров А. Н., Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel., Göttinger Nachrichten 60 (1931).

20. Коренблюм Б. И., О сходимости сингулярных интегралов для некоторых общих классов суммируемых функций, Сб. трудов ин-та математики АН УССР 11, 1948.

21. Красносельский М. А., а) Операторы с монотонными минорантами, ДАН СССР 76, 4 (1951).

б) К задаче о собственных функциях нелинейных уравнений Доклад в Московском матем. об-ве, УМН 6, вып. 4 (1951).

в) Расщепление линейных операторов, действующих из L^p в L^q, ДАН СССР 82, 3 (1952).

г) Расщепление линейного интегрального оператора, действующего из одного пространства Орлича в другое, ДАН СССР 97, 6 (1954).

д) Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.

22. Красносельский М. А. и Крейн С. Г., Признаки непрерывности и полной непрерывности линейного оператора, выраженные в свойствах его квадрата, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 5 (1957).

23. Красносельский М. А и Ладыженский Л. А., Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, Труды Моск. матем. об-ва 3, (1954).

24. Красносельский М. А. и Поволоцкий А. И., К вариационным методам в задаче о точках бифуркации, ДАН СССР 91, 1 (1953).

25. Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б., а) К теории пространств Орлича, ДАН СССР 81, 4 (1951).

б) Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича, ДАН СССР 85, 1 (1952).

в) Дифференцируемость нелинейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича, ДАН СССР 89, 4 (1953).

г) Об одном способе построения N'-функций, эквивалентных дополнительным к заданным, Труды физ.-мат. ф-та ВГУ 33 (1954).

д) О линейных функционалах в пространствах Орлича, ДАН СССР 97, 4 (1954).

е) Общая теория пространств Орлича, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 1 (1956).

ж) Линейные интегральные операторы, действующие в пространствах Орлича, Труды семинара по функциональному анализу ВГУ, вып. 2 (1956).

з) Пространства Орлича и нелинейные интегральные уравнения, Труды Моск. матем. об-ва 7 (1958).

и) Об одном классе выпуклых функций, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 5 (1957).

к) О некоторых нелинейных операторах в пространствах Орлича, ДАН СССР 117, № 3 (1957).

26. Красносельский М. А. и Соболев В. И., а) Условия сепарабельности пространств Орлича, Известия АН СССР, серия матем., 19, 1 (1955).

б) О расщеплении линейных операторов, УМН 4 (1957).

27. Крейн М. Г., О дифференциальных самосопряженных операторах и их симметрических функциях Грина, Матем. сб. т. II, вып. 6 (1937).

28. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, вып. 23 (1948).

29. Ладыженский Л. А., Условия полной непрерывности интегрального оператора П. С. Урысона в пространстве непрерывных функций, ДАН СССР 97, 5 (1954).

30. Лере Ж. и Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения, УМН 1, вып. 3—4 (1946).

31. Лозинский С. М., О сильной сходимости рядов Фурье, ДАН СССР 51, 1 (1946).

32. Люксембург (Luxemburg W. A. J.), Banach function spaces, 1955.

33. Люксембург и Цанен (Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C.), a) Some remarks on Banach function spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A. 59-Indag. Math. 18 (1956).

b) Conjugate spaces of Orlicz spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A. 59-Indag. Math. 18 (1956).

34. Люстерник Л. А., Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве, Известия АН СССР, серия матем., 3 (1939).

35. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951.

36. Медведев Ю. Т., Обобщение одной теоремы Ф. Рисса, УМН 8, 6 (1952).

37. Накано (Nacano H.), Modulared semi-ordered linear spaces, Tokyo Mathem. Book-series, v. 1, 1950.

38. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950.

39. Немыцкий В. В., а) Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений, Матем. сб. 4, 3 (1934).

б) Метод неподвижной точки в анализе, УМН, вып. 1 (1936).
40. Орлич (Orlicz W.), a) Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, Bull. intern. de l'Acad. Pol. série A, Cracovie (1932)
б) Über Räume (L^M), Bull. Intern. de l'Acad. Pol. série A, Cracovie (1936).
41. Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, ч. I, Гостехиздат, 1956.
42. Радон И., О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях, УМН, вып. 1 (1936).
43. Рисс Ф. (Riesz F.), Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910).
44. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
45. Рохлин В. А., Об основных понятиях теории меры, Матем. сб. 25 (67): 1 (1949).
46. Рутицкий Я. Б., а) Про один нелінійний оператор, що діє в просторах Орліча, Доповіді АН УРСР 3 (1952).
б) Применение пространств Орлича при исследовании некоторых функционалов в L^2, ДАН СССР 105, 6 (1955).
в) Об одном свойстве вполне непрерывных линейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича. УМН 11, вып. 2 (1956).
47. Салехов Д. В., а) О норме линейного функционала в пространстве Орлича и об одной внутренней характеристике пространства L^p, ДАН СССР 111, 5 (1956).
б) Характеристическое свойство пространств L^p в классе пространств Орлича, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 5 (1957).
в) О точках Лебега—Орлича, ДАН СССР 116, № 3 (1957).
48. Скворцов П. Г., О сильной сходимости сумм Валле-Пуссена в пространствах Орлича, ДАН СССР 108, 5 (1956).
49. Соболев В. И., а) Об одном нелинейном интегральном уравнении, ДАН СССР 71, 5 (1950).
б) Пространства Орлича над множествами бесконечной меры, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 2 (1956).
в) О расщеплении линейных операторов, ДАН СССР 111, 5 (1956).
50. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.
51. Соломяк М. З., Об ортогональном базисе в пространстве Банаха, Вестник Ленинградского ун-та, № 1, серия математики, механики и астрономии, вып. 1 (1957).
52. Такагаши (Takahashi T.), On the compactness of the function set by the convergence in mean of general type, Stud Math 5 (1934).
53. Тулайков А. Н., Zur kompaktheit im Raum L^p für $p = 1$, Göttinger Nachrichten (1933).
54. Тамаркин (Tamarkin J. D.), On the compactness of the space L^p, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932).

55. Урысон П. С., Об одном типе нелинейных интегральных уравнений, Матем. сб. **31** (1936).

56. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Гостехиздат, 1951.

57. Хаар (Haar A.), Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. **69** (1910).

58. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е. и Полиа Г., Неравенства, ИЛ, 1948.

59. Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1951.

60. Цанен (Zaanen A. C.), а) On a certain class of Banach spaces, Annals of Math. **47**, № 4 (1946).

б) Note on a certain class of Banach spaces, Nederl. Akad. wetensch. Proc. 52-Indag. Math. **11** (1949).

в) Integral transformations and their resolvents in Orlicz und Lebesgue spaces, Compositio Math. **10** (1952).

г) Linear Analysis, New York and Amsterdam, 1953.

61. Шилов Г. Е., а) Однородные кольца, УМН **6**, вып. 1 (1951).

б) Критерий компактности в однородном пространстве функций, ДАН СССР **92**, 1 (1953).

62. Юнг (Young W. H.), On classes of summable functions and their Fourier series, Proc. Roy. soc. **(A) 87** (1912).

63. Ямамуро (Jamamuro S.), Exponents of modulared semiordered linear spaces, Fac. sei. Hokkaido Univ., ser. I, **12**, № 4 (1953).

64 *). Альбрыхт (Albrycht J.), Some remarks on the Marcinkiewicz — Orlicz space, Bull. Acad. polon. sci., **1**, cl. 3, 4 (1956).

65. Вейсс (Weiss G.), A note on Orlicz spaces. Portugaliae math, 15, 1—2 (1956).

66. Виденский В. С., Применение теории целых функций к построению и исследованию N'-функций, дополнительных к данным N'-функциям, ДАН СССР, **121**, 2 (1958).

67. Грибанов Ю. И., К теории пространств l_M, Уч. зап. Казанск. ун-та, **117**, 2 (1957).

68. Динкуляну (Dinculeanu N.), Spatii Orlicz de cimpuri de vectori, Studii si cercetari mat. Acad. RPR, **8**, 3—4 (1957).

69. Красносельский М. А. Об одном функциональном кольце, Труды семинара по функциональному анализу, ВГУ, вып. 6 (1958).

70. Милнс (Milnes H. W.), Convexity of Orlicz spaces, Pacif. J. Math. **7**. 3 (1957).

71. Шрагин И. В., О некоторых операторах в обобщенных пространствах Орлича, ДАН СССР, **117**, 1 (1957).

72.**) 丁夏畦. 关于嵌入定理. 科学記录新輯 **1**, 5 (1957) 287—290.

73. 丁夏畦. 一类 Banach 空間的若干性質. 科学記录新輯 **2**, 2 (1958) 57—60.

74. 吳从炘. 关于空間 $L_{M\Phi}$ 和 D_{Φ}^{h}(I). 科学記录新輯 **3**, 7 (1959) 207—209.

75. 吳从炘. 关于空間 $L_{M\Phi}$ 和 D_{Φ}^{h}(II). 科学記录新輯 **3**, 7 (1959) 210—212.

76. 郭大鈞. Orlicz 空間中的集合之 B^*-列紧性与 B-列紧性. 四川大学学报(自然科学) 1958 年第 1 期 37—62.

77. 吳从炘. 論平均 Lebesgue-Orlicz 点. 哈尔滨工业大学学报 1960 年第 1 期 163—170.

---

*) 作者在校对本书时才看到文献[64]—[71].

**) 文献[72]—[77]是譯者加上的.